Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

14 Quadratische Gleichungen und Funktionen

14.1 Quadratische Gleichungen

Aufgabe 14.1 (Aufgabe aus dem Altbabylonischen Reich, ca. 4000 Jahre alt[1])
Wie lang sind die Seitenlängen eines Rechtecks, bei dem die Summe von Länge und Breite 14 ergibt und dessen Fläche 48 ist?

Definition 14.1 Quadratische Gleichung

Eine **quadratische Gleichung** ist eine Gleichung, die auf die Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

gebracht werden kann für geeignete reelle Zahlen a, b, $c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$.

14.2 Quadratisches Ergänzen

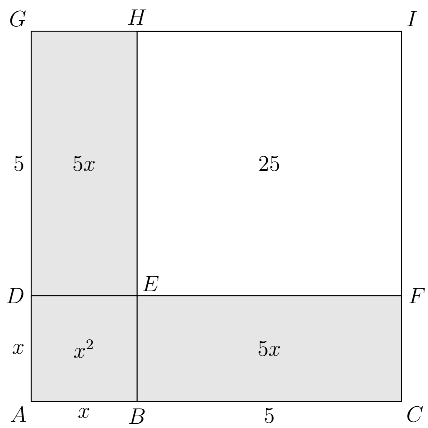
Aufgabe 14.2 Lösen Sie der Reihe nach die folgenden **quadratischen Gleichungen**. Die Gleichungen a) bis t) haben jeweils zwei Lösungen. Lösen Sie die Gleichungen u) bis x) ohne Diskussion der Spezialfälle.

a) $x^2 = 4$	b) $x^2 = 2$	c) $2x^2 = 3$	d) $2x^2 = 16$
e) $x^2 + 1 = 10$	f) $x^2 - 1 = 10$	g) $(x+1)^2 = 4$	h) $(x+1)^2 = 2$
i) $3(x+1)^2 = 27$	j) $x^2 + 2x + 1 = 9$	k) $x^2 + 2x = 8$	l) $2x^2 + 4x + 2 = 8$
m) $x^2 - 2x + 1 = 16$	n) $x^2 - 4x + 4 = 9$	o) $x^2 - 4x = 5$	p) $x^2 - 6x = 16$
q) $3x^2 - 6x = 3$	r) $2x^2 - 12x + 7 = 0$	s) $-3x^2 + 18x = 12$	t) $x^2 + x - 1 = 0$
u) $ax^2 + c = 0$	v) $x^2 + bx = 0$	w) $x^2 + bx + c = 0$	x) $ax^2 + bx + c = 0$

Aufgabe 14.3 (Aufgabe aus dem Algebra-Buch von al-Chwarizmi, etwa 825 n. Chr.[2])
Bestimme alle Lösungen der Gleichung

$$x^2 + 10x = 39$$

und interpretiere deinen Lösungsweg mit Hilfe der Zeichnung rechts geometrisch!
Wo und wieso hast du «quadratisch ergänzt»?
Bonus: Formuliere eine Textaufgabe, zu deren Lösung man die obige Gleichung aufstellen würde!
Hinweis: Verwende das hoffentlich in Aufgabe 14.2 erlernte Verfahren.



[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Quadratische_Gleichung#Geschichte, abgerufen am 28.02.2023
[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Quadratische_Gleichung#Geschichte, abgerufen am 28.02.2023

Merke 14.1 Quadratisches Ergänzen

Jedes Polynom $x^2 + px + q$ zweiten Grades in x kann auf die Form

$$(x+s)^2 + t$$

gebracht werden. Dies erreicht man wie folgt durch Addition einer geschickt gewählten «nahrhaften Null» und Anwenden der ersten binomischen Formel:

$$x^2 + px + q =$$

$$=$$

14.3 Mitternachtsformel

Statt jede quadratische Gleichung einzeln durch quadratische Ergänzung zu lösen, kann man dies auch einmal mit beliebigen Koeffizienten $a \neq 0$, b und c durchführen und so eine allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhalten, die sogenannte **Mitternachtsformel**.

Beachte, dass diese Formel nur dann auswertbar ist, wenn $b^2 - 4ac \geq 0$ gilt.

Merke 14.2 Mitternachtsformel

Die Mitternachtsformel für die Lösungen einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ lautet

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Merke 14.3 Diskriminante und Anzahl der Lösungen

Die **Diskriminante**

$$D \overset{\text{Def.}}{=} b^2 - 4ac$$

einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ entscheidet, wie viele reelle Lösungen die Gleichung hat:

- $D > 0$: zwei reelle Lösungen $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
- $D = 0$: eine reelle Lösung $x = \frac{-b}{2a}$
- $D < 0$: keine reelle Lösung

(lateinisch *discriminare* bedeutet *unterscheiden*)

Aufgabe 14.4 Lösen Sie Teilaufgaben m) bis t) aus Aufgabe 14.2 mit Hilfe der Mitternachtsformel.

Aufgabe 14.5 Lösen Sie die folgenden Gleichungen mit Hilfe der Mitternachtsformel. Geben Sie alle Wurzelterme in den Lösungen in Normalform an.

a) $3x^2 + 2x - 1 = 0$
b) $3x^2 + 2x + \frac{1}{3} = 0$
c) $3x^2 + 2x + 1 = 0$
d) $2(x-1)(x-2) = (x-3)(x-4)$
e) $x^2 = 4x + 16$
f) $5x(x-65) = -4830$

Aufgabe 14.6 Die folgenden Aufgaben sind fast wortwörtlich aus «Quadratische Gleichungen, Repetitionsaufgaben» von Felix Huber, KSR, übernommen. Download http://media.kswillisau.ch/ma/repetition/Quadratische_Gleichungen.pdf

a) Von zwei Zahlen ist die eine um 50 grösser als die andere. Das Produkt der beiden Zahlen ist um 50 grösser als die Summe. Bestimmen Sie die beiden Zahlen. *Beispiel 14, S. 10*

b) Ein Blumenbeet von 3 m Länge und 2 m Breite ist von einem Rasen konstanter Breite umgeben, so dass der Rasen und das Beet denselben Flächeninhalt haben. Wie breit ist der Rasen? *Beispiel 15, S. 10*

c) Ein Mensch beginnt ein Geschäft mit Fr. 2000.-. Den Gewinn des ersten Jahres schlägt er voll zum Kapital. Im zweiten Jahr ist der Gewinn in Prozent genauso hoch, wodurch das Kapital auf Fr. 2645.- anwächst. Wie gross ist der jährlich Gewinn in Prozent? *Beispiel 16, S. 11*

d) Das um 100 verminderte Quadrat einer gesuchten Zahl übertrifft die Zahl 200 um so viel, wie die gesuchte Zahl unter 300 liegt. *Aufgabe 23, S. 11*

e) Die Grundlinie eines Dreiecks mit Flächeninhalt 3.6 m^2 ist um 11.4 m länger als die zugehörige Höhe. Wie lang ist die Grundlinie? *Aufgabe 24, S. 11*

Aufgabe 14.7 Bestimmen Sie den Parameter t jeweils so, dass die Gleichung genau eine Lösung hat:

a) $x^2 + 2x + t = 0$
b) $tx^2 + 5x - 1 = 0$
c) $x^2 + tx + t = 0$
d) $tx^2 + 3x = 3t$
e) $x^2 + x + 1 = tx$
f) $2x^2 + tx + t^2 + 1 = 0$

14.4 Quadratische Terme faktorisieren

Satz 1

Sind x_1 und x_2 die Lösungen einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, so gilt die folgende Faktorisierung:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

D.h. die Lösungsformel kann zum Faktorisieren quadratischer Polynome verwendet werden.

Dies gilt auch, wenn die quadratische Gleichung genau eine Lösung $x_1 = x_2$ hat.

Hat die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ keine Lösung, so gibt es keine solche Faktorisierung.

Aufgabe 14.8 Beweisen Sie Satz 1, indem Sie auf der rechten Seite der behaupteten Gleichung x_1 und x_2 durch die Mitternachtsformel ausdrücken und dann ausmultiplizieren und vereinfachen, bis die linke Seite herauskommt.

Aufgabe 14.9 Faktorisieren Sie die folgenden Terme mit Hilfe der Lösungen der entsprechenden quadratischen Gleichung (oder mit Hilfe binomischer Formeln), falls möglich. Überprüfen Sie Ihre Lösung durch Ausmultiplizieren.
Beispiel: $x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4)$, weil $x^2 + x + 12 = 0$ die Lösungen $x = 3$ und $x = -4$ hat.

a) $x^2 - 5x + 6$	b) $x^2 + 10x + 21$	c) $x^2 - 2x - 15$
d) $2x^2 + 3x - 2$	e) $x^2 + 3x$	f) $x^2 - 5$
g) $x^2 - 2x - 4$	h) $2x^2 + 8x + 8$	i) $4x^2 - 4x + 8$

⚠ Die Teilaufgaben d), f) und h) zeigen, dass die Faktoren nicht immer die Gestalt $(x - z)$ für eine ganze Zahl z haben! Auch wenn dies natürlich bei Aufgaben und Prüfungen in der Schule oft der Fall ist.

Aufgabe 14.10 Beweisen Sie für Terme der Form $x^2 + bx + c$ das folgende Faktorisierungsverfahren:

> «Suche zwei Zahlen so, dass ihr Produkt gleich c und ihre Summe gleich b ist. Diese zwei Zahlen z_1 und z_2 haben dann die Eigenschaft, dass $(x + z_1)(x + z_2)$ die gesuchte Faktorisierung von $x^2 + bx + c$ ist.»

Beispiel: $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$ weil $(-4) \cdot 3 = -12$ und $-4 + 3 = -1$.

Merke 14.4 Faktorisierungsregel

Wenn $x^2 + bx + c = (x + e)(x + f)$ gilt, dann ist b die Summe $e + f$ und c das Produkt $e \cdot f$.

14.4.1 Gleichungen durch Faktorisieren lösen

Merke 14.5 Produkt gleich Null

Ist ein Produkt gleich Null, so muss mindestens einer der beteiligten Faktoren Null sein.
Schafft man es, eine Gleichung auf die Form «Produkt gleich Null» zu bringen, so muss man nur die Lösungen der einzelnen Gleichungen «Faktor gleich Null» bestimmen (was meist deutlich einfacher ist).

Aufgabe 14.11
Lösen Sie die die folgenden Gleichungen, indem Sie sie auf die Form «Produkt = 0» bringen und dann die Faktoren betrachten. Bitte nicht die Mitternachtsformel verwenden! Die Gleichungen sind so gemacht, dass sie leicht auf die Form «Produkt gleich Null» gebracht werden können.

a) $x^2 + 11x + 24 = 0$	b) $(x + 3)(x + 8) = x$	c) $x^2 + 4x = 32$
d) $3x^2 = 3x + 90$	e) $x^3 = 2x$	f) $(x + 2)^2 = 4$

Aufgabe 14.12 Lösen Sie die Gleichungen, indem Sie auf die Form «Produkt gleich Null» bringen. Die folgenden Gleichungen haben bis zu 5 Lösungen:

a) $x^3 + 4x^2 = 21x$	b) $(x^2 + 4x + 3)(x^2 + 6x + 8) = 0$	c) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$
d) $4x^5 - 4x^3 = 24x$	e) $(x^2 - 2)(x^3 - x^2 - 30x) = 0$	f) $(x^2 + 2)(x^3 + x) = 0$

14.5 Quadratische Funktionen

Definition 14.2 Quadratische Funktion

Eine **quadratische Funktion** ist eine Funktion, die auf die Form

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

gebracht werden kann für geeignete reelle Zahlen a, b, $c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$.

Merke 14.6 Normalparabel

Der Graph der quadratischen Funktion $f(x) = x^2$ heisst **Normalparabel**.
Mit anderen Worten ist die Normalparabel die Teilmenge $\{(x, y) \mid y = x^2\}$ der Ebene.

Erinnerung (Parabel als geometrischer Ort): Sind in der Ebene ein Punkt (= der Brennpunkt) und eine Gerade (= die Leitgerade) fixiert, so heisst die Menge aller Punkte der Ebene, die denselben Abstand von Brennpunkt und Leitgeraden haben, **Parabel**. Der **Scheitel** einer solchen Parabel ist der «Mittelpunkt» zwischen Brennpunkt und Leitgerade.

In Aufgabe 14.14 werden wir sehen, dass die Normalparabel wirklich eine Parabel in diesem Sinne ist (und somit der Namensbestandteil «parabel» gerechtfertigt ist):

- ihr Brennpunkt ist $B = \left(0, \frac{1}{4}\right)$;
- ihre Leitgerade ist $y = -\frac{1}{4}$;
- ihr Scheitel ist der Ursprung $O = (0, 0)$;
- ihre Symmetrieachse ist die y-Achse.

Allgemein kann man zeigen, dass der Graph jeder quadratischen Funktion eine *Parabel* ist.

Aufgabe 14.13 Bestimmen Sie jeweils exakt (ohne Taschenrechner) die (Koordinaten der) Schnittpunkte der Normalparabel mit den durch die folgenden Funktionen gegebenen Geraden. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse durch eine Skizze.

a) $g(x) = x + \frac{3}{4}$ b) $h(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ c) $i(x) = 2x - 1$ d) $j(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

14.6 Geometrie der Normalparabel

Aufgabe 14.14 Normalparabel als geometrischer Ort:
Betrachten Sie den (Brenn-)Punkt $B = \left(0, \frac{1}{4}\right)$ und die durch $y = -\frac{1}{4}$ definierte (Leit-)Gerade ℓ.

a) Zum Aufwärmen: Zeigen Sie, dass der Punkt $Q = \left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ auf der Normalparabel liegt und denselben Abstand von B und von ℓ hat.

b) Beweisen Sie: Die Normalparabel $y = x^2$ ist die (als geometrischer Ort definierte) Parabel mit Brennpunkt B und Leitgerade ℓ ist.
Vorgehen: Sei $P = (v, w)$ ein beliebiger Punkt der Zeichenebene. Zu zeigen ist, dass der Punkt P genau dann auf der Normalparabel liegt, wenn seine Abstände zu B und zu ℓ gleich gross sind.
Geben Sie die beiden Abstände $\overline{\ell P}$ und $\overline{BP}$ in Abhängigkeit von v und w an und zeigen Sie, dass diese beiden Abstände genau dann gleich gross sind, wenn P auf der Normalparabel liegt (d.h. $w = v^2$) gilt.

Aufgabe 14.15 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Tangente (= Berührgeraden) an die Normalparabel $f(x) = x^2$ im Punkt $P = \left(p, p^2\right)$.

Eventuell ist es hilfreich, zuerst als konkretes Beispiel die Tangente an den Punkt $(3, 9)$ auszurechnen.

Vorgehen: Sei $g(x) = mx + q$ die Funktionsgleichung der Tangente. Sie dürfen die folgenden zwei Fakten verwenden: (1) P liegt auf der Tangente; (2) Tangente und Parabel schneiden sich genau einmal.

Wählen Sie die Steigung m der Tangente als Unbekannte.

Bestimmen Sie im ersten Schritt q so in Abhängigkeit von m, dass die Gerade durch den Punkt P geht.

Bestimmen Sie im zweiten Schritt m so, dass die Gerade die Parabel in genau einem Punkt schneidet.

Merke 14.7 Tangente der Normalparabel

Die Tangente an die Normalparabel $y = x^2$ im Punkt (p, p^2) hat die Funktionsgleichung $t(x) = 2px - p^2$.

Aufgabe 14.16 Beweisen Sie, dass von oben parallel zur y-Achse einfallende Strahlen von der Normalparabel $y = x^2$ zum Brennpunkt $B = \left(0, \frac{1}{4}\right)$ hin reflektiert werden.

Die Reflexion an einer Kurve stimmt mit der Reflexion an der Tangente im Reflexionspunkt überein; dabei gilt «Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel».

Vorgehen: Sei p die x-Koordinate eines vertikal einfallenden Strahls s. Sei P der Schnittpunkt des Strahls mit der Parabel und sei L der Schnittpunkt des verlängerten Strahls mit der Leitlinie. Sei $M = M_{BL}$ der Mittelpunkt der Punkte B und L. Sei $w = MP$ die Verbindungsgerade von M und P.

Machen Sie eine sorgfältige Skizze der Situation.

Warum genügt es zu zeigen, dass w die Tangente der Normalparabel im Punkt P ist?

Aufgabe 14.17 Gegeben sind zwei Parabeln, zum einen die Normalparabel $f(x) = x^2$ und zum anderen die Parabel $g(x) = -(x-2)^2 + \frac{3}{2}$. Bestimmen Sie die Gleichung(en) der gemeinsamen Tangente(n) an die Parabeln und die Koordinaten der Berührungspunkte.

Machen Sie zuerst eine Skizze der Situation, berechnen Sie dann die Tangenten und Berührpunkte und fertigen Sie danach eine genaue Zeichnung an.

Vorgehen: Finden Sie diejenige Tangente an die Normalparabel, die die zweite Parabel in genau einem Punkt schneidet.

14.7 Funktionsgraphen transformieren

Wenn man eine Funktion beispielsweise als $f(x) = 3x^2 - 7x + 1$ schreibt, so meint man mit ihrem «Funktionsterm» den Ausdruck $3x^2 - 7x + 1$, also die Rechenvorschrift zur Berechnung der Funktion.

14.7.1 Graphen verschieben

Merke 14.8 Verschiebung in y-Richtung

Wird eine (positive) Zahl zu einer Funktion (= einem «Funktionsterm») addiert bzw. von ihr subtrahiert, so verschiebt sich ihr Funktionsgraph entsprechend in y-Richtung nach oben bzw. nach unten.

Beispiel: Der Graph der Funktion $g(x) = x^2 + 3$ entsteht aus dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ durch Verschiebung um 3 Einheiten nach oben.

Merke 14.9 Verschiebung in x-Richtung

Wird x in einer Funktion (= einem «Funktionsterm») überall durch $(x - a)$ ersetzt, so verschiebt sich ihr Funktionsgraph um a Einheiten in x-Richtung (also nach rechts).
Achtung: Konkret bedeutet ein Ersetzen durch $(x + 3)$ eine Verschiebung um 3 Einheiten **nach links**. Beachte: $(x + 3) = (x - (-3))$.

Beispiele:

- Der Graph der Funktion $g(x) = (x-2)^2$ entsteht aus dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ durch Verschiebung um 2 Einheiten nach rechts (= in x-Richtung).
- Wir nehmen an, dass zwei Brüder dasselbe Wachstumsverhalten haben und im Abstand von 3 Jahren mit derselben Grösse geboren werden. Ist $g(t)$ die Grösse des älteren Bruders zur Zeit t, so ist $g(t-3)$ die Grösse des jüngeren Bruders zur Zeit t (die Zeit t ist in Jahren gemessen).
  Der Graph für das (Grössen-)Wachstum des jüngeren Bruders (= der Graph von $g(t-3)$) entsteht dann aus dem Graphen für das der Wachstum des älteren Bruders (= dem Graphen von $g(t)$) durch Verschieben um 3 Jahre nach rechts.

Aufgabe 14.18 In den folgenden Teilaufgaben ist jeweils angegeben, wo der Scheitel S einer (in x- oder

y-Richtung) verschobenen Normalparabel liegt. Bestimmen Sie jeweils die Funktionsgleichung der verschobenen Normalparabel und geben Sie diese in der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ an.

a) $S = (0, -2)$ b) $S = (2, 0)$ c) $S = (1, 1)$ d) $S = (-2, -3)$

Aufgabe 14.19 Schreiben Sie die folgenden quadratischen Funktionen jeweils in der Form $f(x) = (x - a)^2 + b$ und bestimmen Sie damit den Scheitel S der zugehörigen Parabel. *Hinweis: Quadratisch ergänzen.* Machen Sie zusätzlich eine kleine Handskizze der Graphen (Einheit 1 oder 2 Häuschen).

a) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ b) $f(x) = x^2 + 12x - 5$ c) $f(x) = x^2 - 6x + 6$ d) $f(x) = x(x - 4)$

Aufgabe 14.20 Seien b und c zwei beliebige reelle Zahlen. Bestimmen Sie den Scheitel S der Parabel $f(x) = x^2 + bx + c$. *Hinweis: Quadratisch Ergänzen.*

Aufgabe 14.21 Skizzieren Sie, jeweils ausgehend vom Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$, die Graphen der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \sqrt{x}$ b) $g(x) = \sqrt{x - 2} + 2$ c) $h(x) = \sqrt{x + 2} - 2$ d) $i(x) = 2 + \sqrt{x - 1}$

14.7.2 Graphen axial strecken

Merke 14.10 Strecken in y-Richtung

Wird eine Funktion (= ein «Funktionsterm») mit einer Zahl a multipliziert, so wird ihr Graph in y-Richtung mit dem Faktor a gestreckt (mit der x-Achse als Streckachse).

Beispiele:

- Der Graph der Funktion $g(x) = 3x^2$ entsteht aus dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ durch Streckung in y-Richtung um den Faktor 3.
- Der Graph der Funktion $g(x) = -x^2 = (-1) \cdot x^2$ entsteht aus dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ durch Streckung in y-Richtung um den Faktor -1, d.h. durch Spiegelung an der y-Achse.
- Der Graph der Funktion $g(x) = -3x^2$ entsteht aus dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ durch Streckung in y-Richtung um den Faktor -3, d.h. durch Streckung in y-Richtung um den Faktor 3 und anschliessender Spiegelung an der x-Achse.

Merke 14.11 Strecken in x-Richtung

Wird x in einer Funktion «Funktionsterm») überall durch ax ersetzt, so wird ihr Graph in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{a}$ gestreckt (mit der y-Achse als Streckachse).

Beispiele:

- Der Graph der Funktion $g(x) = 2 \cdot (3x) + 1$ entsteht aus dem Graphen der Funktion $f(x) = 2x + 1$ durch Streckung in x-Richtung um den Faktor $\frac{1}{3}$ (eine «Stauchung hin zur y-Achse»).
- Der Graph der Funktion $g(x) = 2 \cdot (-x) + 1 = 2 \cdot ((-1) \cdot x) + 1$ entsteht aus dem Graphen der Funktion $f(x) = 2x + 1$ durch Streckung in x-Richtung um den Faktor $\frac{1}{-1} = -1$, also durch Spiegelung an der y-Achse.
- Der Graph der Funktion $g(x) = 2 \cdot (-3x) + 1$ entsteht aus dem Graphen der Funktion $f(x) = 2x + 1$ durch Streckung in x-Richtung um den Faktor $\frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$, also durch Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{3}$ und anschliessender Spiegelung an der y-Achse.
- Variation des Wachstumsbeispiels: Wenn $a(t)$ das Wachstum einer Person A beschreibt (in Abgängigkeit von der Zeit t) und eine andere Person B doppelt so schnell wächst, so beschreibt $a(2t)$ das Wachstum der Person B: Der Graph von $a(2t)$ (= der Wachstumsgraph von Person B) ist der in t-Richtung um den Faktor $\frac{1}{2}$ gestreckte (also um den Faktor 2 gestauchte) Graph von $a(t)$.

Aufgabe 14.22 Skizzieren Sie, jeweils ausgehend von der Normalparabel $f(x) = x^2$, die Graphen der folgenden Funktionen.

a) $g(x) = 2x^2$ b) $h(x) = (2x)^2$ c) $i(x) = -x^2$ d) $j(x) = -\frac{1}{2}x^2$

Aufgabe 14.23 Skizzieren Sie, jeweils ausgehend vom Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$, die Graphen der folgenden Funktionen.

a) $g(x) = -\sqrt{x}$ b) $h(x) = \sqrt{-x}$ c) $i(x) = -\sqrt{2x}$ d) $j(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{-x}$

14.8 Scheitel und Öffnungsfaktor

Merke 14.12

Der **Öffnungsfaktor** einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ ist die Zahl a.
Ist der Öffnungsfaktor

- **positiv**, so ist die Parabel nach oben geöffnet;
- **negativ**, so ist die Parabel nach unten geöffnet.

Ein betragsmässig

- grosser Öffnungsfaktor bedeutet eine «enge» Parabel (Beispiele: $f(x) = 50x^2$ oder $f(x) = -1000x^2$);
- kleiner Öffnungsfaktor bedeutet eine «weit geöffnete» Parabel (Beispiele: $f(x) = \frac{1}{70}x^2$ oder $f(x) = -0.001x^2$);

Aufgabe 14.24 Im Folgenden sei $f(x) = ax^2 + bx + c$ eine allgemeine quadratische Funktion mit $a \neq 0$.

a) Bestimmen Sie die x-Koordinate des Scheitels von f.
Vorgehen: Klammern Sie zuerst a aus und benutzen Sie dann Aufgabe 14.20.

b) Wie können die Lösungen von $f(x) = 0$ geometrisch interpretiert werden?

c) Was ist der Durchschnitt (= das arithmetische Mittel, wie Notendurschnitt) der Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$?
Was hat das mit dem Scheitelpunkt zu tun und warum?
Bonus: In dieser und der vorigen Aufgabe: Was passiert, wenn man die Zahl Null in der Gleichung $f(x) = 0$ durch eine beliebige andere Zahl, etwa 17, ersetzt?

Merke 14.13

Der Scheitel der quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ hat die x-Koordinate $-\frac{b}{2a}$.

14.9 Repetitionsaufgaben

Aufgabe 14.25 Lösen Sie die folgenden Gleichungen, indem Sie sie jeweils auf die Form «Produkt gleich Null» bringen:

a) $(x^3 + 2x^2 + x)(x^2 - 3x + 2) = 0$
b) $x^3 + 12x = 7x^2$
c) $(x^2 - 2)(x^3 - x) = 0$
d) $x^4 + 4 = 4x^2$

Aufgabe 14.26 Hinweis: Die x-Koordinate des Scheitels der Parabel $f(x) = ax^2 + bx + c$ ist $\frac{-b}{2a}$ (nach Merke 14.13).

a) In einer Turnhalle wird ein Volleyball zum Zeitpunkt $t = 0$ senkrecht nach oben geworfen. Die Höhe des Balls in Metern über dem Boden kann durch die Funktion $h(t) = 1 + 12t - 5t^2$ beschrieben werden.
Welche Höhe hat der Ball beim Loslassen (= Start des Wurfs)?
Wann stösst der Ball an die Decke, die sich 8m über Boden befindet? Wie interpretieren Sie die zweite Lösung?
Wenn die Decke nicht wäre, welche höchste Höhe würde der Ball erreichen?
Skizzieren Sie die Funktion h.

b) (Variante des isoperimetrischen Problems) Zeigen Sie, dass unter allen Rechtecken mit Umfang 4 das Einheitsquadrat den grössten Flächeninhalt hat.

Aufgabe 14.27 Die Tangente t an die Normalparabel $f(x) = x^2$ im Punkt (p, p^2) hat die Gleichung $t(x) = 2px - p^2$ (nach Merke 14.7).

a) Wie lauten die Gleichungen der Tangenten an die Normalparabel, die durch den (nicht auf der Normalparabel liegenden) Punkt $Q = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ gehen?
Prüfen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe einer Skizze.

b) Gegeben ist eine weitere Parabel $g(x) = -(x-4)^2 + 6$. Zeigen Sie rechnerisch, dass die gemeinsamen Tangenten an f und g die Parabel f in den Punkten mit den x-Koordinaten 1 und 3 berühren.
Berechnen Sie auch die Berührungspunkte mit g und fertigen Sie eine Skizze der Situation.

c) Sei Q ein beliebiger Punkt unterhalb der Normalparabel. Zeigen Sie, dass die x-Koordinate von Q genau in der Mitte zwischen den x-Koordinaten der Berührungspunkte der beiden Tangenten an die Normalparabel durch Q liegen.

14.10 Komplexe Zahlen

Nachdem sich Mathematiker durchgerungen hatten, negative Zahlen auch als ganz normale Zahlen zu akzeptieren, stellte sich immer wieder die Frage, wie mit Wurzeln aus negativen Zahlen umzugehen sei.

Es stellt sich heraus, dass man die reellen Zahlen um «Wurzeln aus negativen Zahlen» erweitern kann, so wie die natürlichen Zahlen um ganze Zahlen, dann um Brüche und schliesslich um reelle Zahlen erweitert worden sind.

Einer der ersten, die sich damit beschäftigt haben, war der Mathematiker Cardano (1501 - 1576). Als Beispiel ist folgende Aufgabe überliefert:

Aufgabe 14.28 Gesucht sind zwei Zahlen mit Summe 10 und Produkt 30. Schreiben Sie die Lösungen mit Hilfe der Mitternachtsformel auf (wird Wurzeln aus negativen Zahlen enthalten). Bilden Sie dann die Summe und das Produkt, um die Lösungen zu überprüfen.

Man stellt fest, dass diese Ausdrücke Lösungen des Problems sind, gleichzeitig aber keine reellen Zahlen sein können. Während dies eine etwas sinnfreie Aufgabe ist, hat Cardano aber mit Hilfe dieser «sophistischen Ausdrücke» schliesslich eine Lösungsformel für Gleichungen 3. Grades erarbeitet.

Heute bilden komplexe Zahlen das Fundament der Quantenphysik (Beschreibung von Vorgängen in atomaren Grössenordnungen), Signalverarbeitung, Regeltechnik und weiteren Anwendungsgebieten.

Merke 14.14 Komplexe Zahlen

Die Erweiterung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nennt man heute **komplexe Zahlen** $\mathbb{C}$. Die komplexen Zahlen enthalten die spezielle **imaginäre Einheit** i mit der Eigenschaft

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

Eine komplexe Zahl $c \in \mathbb{C}$ hat die Form

$$c = a + b\,\mathrm{i} \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{R},$$

wobei a der **Realteil** und b der **Imaginärteil** von c genannt wird.
Alle bekannten Rechengesetze sind auch für komplexe Zahlen gültig.

Aufgabe 14.29 Berechnen Sie und geben Sie das Resultat in der Form $(a + b\,\mathrm{i})$ an.

a) $(3 + 2\mathrm{i}) + (1 + 4\mathrm{i})$ b) $(1 + \mathrm{i})^2$ c) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1 + \mathrm{i})\right)^8$

d) $(1 - \mathrm{i}) \cdot (1 + \mathrm{i})$ e) $\frac{(2+\mathrm{i})}{\mathrm{i}}$ f) $\frac{-2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$

14.10.1 Geometrische Interpretation

Die komplexen Zahlen können als Punkte einer Ebene aufgefasst werden, wobei die x-Achse den reellen Zahlen und die y-Achse den rein imaginären Zahlen entspricht.

Definition 14.3 Betrag und Argument

Der **Betrag** einer komplexen Zahl ist gleich dem Abstand von 0. D.h.

$$|a + b\,\mathrm{i}| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Das **Argument** einer komplexen Zahl c ist gleich dem orientierten Winkel zwischen der positiven reellen Achse und der orientierten Geraden von 0 zu c.

Die **Addition** zweier komplexen Zahlen entspricht (wie bei den reellen Zahlen) dem Aneinanderhängen von zwei Pfeilen.

Die **Multiplikation** zweier komplexen Zahlen entpricht einer Streckung (wie bei den reellen Zahlen) mit einer zusätzlichen Rotation. Konkret werden die Argumente addiert und die Beträge multipliziert.

Wird mit einer komplexen Zahl c mit Betrag 1 multipliziert, entspricht dies einer Drehung um den Ursprung mit dem Argument von c.

Aufgabe 14.30

a) Schreiben Sie die komplexe Zahl c mit Betrag 1 und Argument 45°in der Form $a + b\,\mathrm{i}$.

b) Schreiben Sie die komplexe Zahl c mit Betrag r und Argument φ in der Form $a + b\,\mathrm{i}$.

Aufgabe 14.31 Bestimmen Sie alle 12 komplexen Lösungen von $x^{12} = 1$. *Hinweis: Überlegen Sie sich, was das Potenzieren geometrisch bedeutet.*

14.10.2 Die Mandelbrotmenge

Für jede komplexe Zahl c wird mit $z = 0$ gestartet und folgende Berechnung wiederholt:

$$z := z^2 + c$$

Aufgabe 14.32 Was passiert mit dem Betrag von z wenn $|z| > 2$ und $|c| < 2$?

Definition 14.4 Mandelbrotmenge

Die Mandelbrotmenge ist die Menge aller komplexen Zahlen c für die die wiederholte Anwendung der Formel $z := z^2 + c$ (Start mit $z = 0$) den Betrag von z **nicht** beliebig anwachsen lässt.

Vorgehen: Starte mit einem c und $z = 0$. Zähle, wie viel mal $z := z^2 + c$ gerechnet werden kann bevor $|z| > 2$. Nach einer gegebenen Anzahl Wiederholungen, brich ab.

Färbe c mit der Farbe ein, deren Nummer der Anzahl Wiederholungen entspricht.

14.11 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: “If you want to nail it, you’ll need it”.

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 14.1 ex-altbabylonisch

Sei x die Länge und y die Breite. Dann ist das Gleichungssystem $x + y = 14$ und $xy = 48$ zu lösen.

Wenn man vermutet, dass Länge und Breite natürliche Zahlen sind, so kommt man durch Ausprobieren schnell auf zwei Lösungen:

- 1. Lösung: $x = 6$ und $y = 8$
- 2. Lösung: $x = 8$ und $y = 6$

Alternativ verwende man die Substitutionsmethode: Die erste Gleichung liefert $y = 14-x$. Substituiert man dies in die zweite Gleichung, so erhält man $x(14 - x) = 48$ oder ausmultipliziert $14x - x^2 = 48$ bzw. umgeschrieben

$$x^2 - 14x + 48 = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung. Wie man eine solche Gleichung allgemein löst, ist das Thema dieses Kapitels. Wer die Faktorisierung $x^2 - 14x + 48 = (x - 6)(x - 8)$ sieht, kommt auf die Gleichung

$$(x - 6)(x - 8) = 0.$$

Da ein Produkt nur dann Null ist, wenn einer der Faktoren Null ist, folgt $x = 6$ (und $y = 8$) oder $x = 8$ (und $y = 6$).

Lösung zu Aufgabe 14.2 ex-mitternachts-formel-erarbeiten

a) $x = \pm 2$

b) $x = \pm\sqrt{2}$

c) $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{6}$

d) $x = \pm 2\sqrt{2}$

e) $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

f) $x^2 = 11 \Rightarrow x = \pm\sqrt{11}$

g) $(x + 1) = \pm 2$ bzw. ausgeschrieben $x + 1 = 2$ oder $x + 1 = -2$; also $x = 1$ oder $x = -3$ (zwei Lösungen). Meist schreibt man diese zwei Lösungen kurz so auf: $x_1 = 1,\ x_2 = -3$

h) $(x + 1) = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x_1 = \sqrt{2} - 1,\ x_2 = -\sqrt{2} - 1$

i) $(x + 1)^2 = 9 \Rightarrow (x + 1) = \pm 3 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -4$

j) $(x + 1)^2 = 9 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -4$

k) $x^2 + 2x + 1 = 9 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -4$

l) $x^2+2x+1 = 4 \Rightarrow (x+1)^2 = 4 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -3$

m) $(x - 1)^2 = 16 \Rightarrow x_1 = 5,\ x_2 = -3$

n) $(x - 2)^2 = 9 \Rightarrow x - 2 = \pm 3 \Rightarrow x_1 = 5,\ x_2 = -1$

o) $x^2 - 4x + 4 = 9 \Rightarrow x_1 = 5,\ x_2 = -1$

p) $x^2 - 2\cdot x\cdot 3 = 16 \Rightarrow x^2 - 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 = 16 + 3^2 \Rightarrow (x - 3)^2 = 25 \Rightarrow x_1 = 8,\ x_2 = -2$

q) $x^2 - 2x = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 2 \Rightarrow (x - 1)^2 = 2 \Rightarrow x_1 = \sqrt{2} + 1,\ x_2 = -\sqrt{2} + 1$

r) $x^2 - 6x + \frac{7}{2} = 0 \Rightarrow x^2 - 2\cdot 3\cdot x + 3^2 + \frac{7}{2} = 3^2 \Rightarrow (x - 3)^2 = \frac{11}{2} \Rightarrow x_1 = 3 + \frac{\sqrt{22}}{2},\ x_2 = 3 - \frac{\sqrt{22}}{2}$

s) $x^2 - 6x = -4 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 5 \Rightarrow (x - 3)^2 = 5 \Rightarrow x_1 = 3 + \sqrt{5},\ x_1 = 3 - \sqrt{5}$

t) $x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2},\ x_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$

u) $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ (für $a \neq 0$, wobei a und c unterschiedliche Vorzeichen haben müssen oder $c = 0$ gelten muss, damit $-\frac{c}{a} \geq 0$ gilt und die Wurzel definiert ist)

v) $x(x + b) = 0$ also (Produkt genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null) $x = 0$ oder $x + b = 0$, d.h. $x = 0$ oder $x = -b$

w)

$$
\begin{aligned}
x^2+bx+c &= 0 && \Big|+\left(\frac{b}{2}\right)^2-c\\
x^2+2\cdot\frac{1}{2}bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2}\right)^2-c && \text{binomische Formel}\\
\left(x+\frac{1}{2}b\right)^2 &= \frac{1}{4}b^2-c && \big|\pm\sqrt{\cdot}\ \text{(erlaubt, falls rechte Seite}\geq 0)\\
x+\frac{1}{2}b &= \pm\sqrt{\frac{1}{4}b^2-c} && \Big|-\frac{1}{2}b\\
x &= -\frac{1}{2}b\pm\sqrt{\frac{1}{4}b^2-c}
\end{aligned}
$$

x) Siehe Herleitung der Mitternachtsformel in Abschnitt 14.3 auf Seite 2

Lösung zu Aufgabe 14.3 ex-quadratische-ergaenzung-geometrisch

$$
\begin{aligned}
x^2+10x &= 39\\
x^2+2\cdot 5x &= 39\\
x^2+2\cdot 5x+5^2 &= 39+5^2\\
(x+5)^2 &= 64\\
x+5 &= \pm\sqrt{64}=\pm 8\\
x_1 = 3, &\quad x_2=-13
\end{aligned}
$$

Die linke Seite ist die graue Fläche in der Zeichnung.
Quadratische Ergänzung: Die graue Fläche wurde durch das Quadrat $EFIH$ der Seitenlänge 5 **zum Quadrat** $ACIG$ der Seitenlänge $x+5$ **ergänzt**.
(links binomische Formel)

Bemerkung: Die positive Lösung $x_1=3$ ist geometrisch sinnvoll.
Mögliche Textaufgabe: Finde eine Länge x, so dass ein Quadrat mit Seitenlänge x und ein Rechteck mit Breite x und Höhe 10 zusammen den Flächeninhalt 39 haben!

Lösung zu Aufgabe 14.5 ex-allg-quadratische-gleichungen

a) $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=-1$
b) $x=-\frac{1}{3}$
c) $\mathbb{L}=\varnothing$
d)

$$
\begin{aligned}
2(x-1)(x-2) &= (x-3)(x-4)\\
2(x^2-3x+2) &= x^2-7x+12\\
2x^2-6x+4 &= x^2-7x+12 && \big|-x^2+7x-12\\
x^2+x-8 &= 0\\
x_{1,2} &= \frac{-1\pm\sqrt{33}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{33}
\end{aligned}
$$

e) $x^2-4x-16=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{80}}{2}=2\pm 2\sqrt{5}$
f) $5x^2-325x+4830=0 \Rightarrow x_1=42,\ x_2=23$

Lösung zu Aufgabe 14.6 ex-textaufgaben-quadr-gleichung
Die folgenden Lösungen sind fast wortwörtlich aus «Quadratische Gleichungen, Repetitionsaufgaben» von Felix Huber, KSR, übernommen. Download http://media.kswillisau.ch/ma/repetition/Quadratische_Gleichungen.pdf

a) 1. Schritt : Variable(n) deklarieren: $x =$ kleinere Zahl.
Also ist die grössere Zahl $x + 50$.
2. Schritt : Gleichung aufstellen:
Da das Produkt um 50 grösser ist als die Summe, muss zur Summe 50 addiert werden, um das Produkt zu bekommen: Produkt = Summe + 50, d.h.

$$x(x + 50) = (x + (x + 50)) + 50$$

3. Schritt: Gleichung lösen

$$\begin{aligned} x(x+50) &= (x+(x+50))+50 && \\ x^2+50x &= 2x+100 && \mid -2x-100 \\ x^2+48x-100 &= 0 && \mid \text{Faktorisieren oder Lösungsformel} \\ (x-2)(x+50) &= 0 && \\ x-2=0 \text{ oder } x+50 &= 0 && \\ x=2 \text{ oder } x &= -50 && \end{aligned}$$

4. Schritt: Antwortsatz
Die beiden Zahlen lauten 2 und 52 oder -50 und 0.

b) $x =$ Breite des Rasens
Gleichung: Fläche Beet = Fläche Einfassung (machen Sie eine Skizze!)

$$\begin{aligned} 2\cdot 3 &= 2\cdot 2x + 2\cdot 3x + 4x^2 && \\ 6 &= 10x + 4x^2 && \mid -6 \\ 0 &= 4x^2+10x-6 && \mid : 2 \text{ dieser Schritt ist optional} \\ 0 &= 2x^2+5x-3 && \mid \text{Lösungsformel} \\ x_{1,2} &= \frac{-5\pm\sqrt{25-4\cdot 2\cdot(-3)}}{4} = \frac{-5\pm\sqrt{49}}{4} = \frac{-5\pm 7}{4} && \\ x_1 &= \frac{1}{2} \qquad x_2 = -3 && \end{aligned}$$

Die negative Lösung $x_2 = -3$ ist gartenbautechnisch sinnlos und muss deswegen verworfen werden.
Die Einfassung ist 0.5 m breit.

c) $x =$ Prozentsatz (als reelle Zahl) des jährlichen Gewinns
Gleichung: Kapital nach 2 Jahren:

$$\begin{aligned} 2645 &= 2000\cdot(1+x)^2 && \mid : 2000 \\ \frac{529}{400} &= (1+x)^2 && \mid \sqrt{\cdot} \\ \pm\frac{23}{20} &= 1+x && \mid -1 \\ x_1 &= \frac{3}{20} = \frac{15}{100} = 0.15 \qquad x_2 = -\frac{43}{20} = -\frac{215}{100} = -2.15 && \end{aligned}$$

Die erste Lösung entspricht einem Zins vom 0.15=15%.
Die zweite (unbrauchbare negative Lösung) entspricht einem grossen Verlust im ersten Jahr, auf dieses negative Kapital (Schulden) wird ein negativer Zins erwirtschaftet, was dann einem Gewinn entspricht.

d) $x =$ gesuchte Zahl
$x^2 - 100 - 200 = 300 - x$, Lösungen $x_1 = -25$, $x_2 = 24$.
Die Zahl ist -25 oder 24.

e) $x =$ Länge der Grundlinie in m
Die zu lösende Gleichung ist $3.6 = \frac{x(x-11.4)}{2}$.
Die Lösungen sind $x_1 = 12$, $x_2 = -0.6$, wobei die negative Lösung geometrisch nicht sinnvoll ist. Die Grundlinie ist 12 m lang.

Lösung zu Aufgabe 14.7 ex-anzahl-loesungen-quadr-gleichung

Eine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ hat genau dann genau eine Lösung, wenn ihre Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ Null ist. Wir müssen also jeweils die Gleichung $D = 0$ nach t auflösen.

a) $D = 4 - 4t = 0$, also $t = 1$.

b) $D = 25 + 4t = 0$, also $t = -\frac{25}{4}$.

c) $D = t^2 - 4t = t(t-4) = 0$, also $t = 0$ oder $t = 4$
Bemerkung: Die Gleichung $t^2 - 4t = 0$ ist eine quadratische Gleichung **in der Variablen** t und lässt sich auch mit der Mitternachtsformel lösen: $t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{4 \pm 4}{2}$, also $t_1 = 4$ und $t_2 = 0$.

d) $D = 9 + 12t^2 = 0$, also keine Lösung (denn $D = 9 + 12t^2 \geq 9 > 0$ für jede reelle Zahl t). Dies bedeutet, dass die betrachtete quadratische Gleichung stets zwei verschiedene Lösungen x_1 und x_2 hat.
Alternative: Die quadratische Gleichung $12t^2 + 9$ hat keine Lösung, denn ihre Diskriminante $0^2 - 4 \cdot 12 \cdot 9 = -4 \cdot 12 \cdot 9$ ist negativ.

e) $x^2 + x(1-t) + 1 = 0$, also $D = (1-t)^2 - 4 = 0$, d.h. $1 - t = \pm 2$, d.h. $t_1 = -1$, $t_2 = 3$.

f) $2x^2 + tx + (t^2 + 1) = 0$, also $D = t^2 - 4 \cdot 2 \cdot (t^2 + 1) = t^2 - 8t^2 - 8 = -7t^2 - 8 = 0$, also keine Lösung; genauer ist die Diskriminante $D = -7t^2 - 8$ für alle $t \in \mathbb{R}$ negativ, d.h. die Gleichung $2x^2 + tx + t^2 + 1 = 0$ hat für **kein** t eine Lösung.

Lösung zu Aufgabe 14.8 ex-beweis-faktorisierung

$$\begin{aligned}
&a(x - x_1)(x - x_2) = a\left(x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1 x_2\right) = \\
&= ax^2 - ax\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) + a \cdot \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \\
&= ax^2 - ax\frac{-2b}{2a} + a \cdot \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} = \\
&= ax^2 + bx + a \cdot \frac{4ac}{4a^2} = ax^2 + bx + c
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 14.9 ex-faktorisieren

a) $(x-2)(x-3)$

b) $(x+3)(x+7)$

c) $(x-5)(x+3)$

d) Die Gleichung $2x^2 + 3x - 2 = 0$ hat die beiden Lösungen $x = -2$ und $x = \frac{1}{2}$. Somit erhalten wir die Faktorisierung $2x^2 - 3x - 2 = 2(x+2)(x - \frac{1}{2})$.

e) $x(x+3)$

f) $\left(x + \sqrt{5}\right)\left(x - \sqrt{5}\right)$ (bin. F.)

g) $x^2 - 2x - 4$ hat die beiden Lösungen $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$. Folglich gilt

$$x^2 - 2x - 4 = \left(x - (1 + \sqrt{5})\right) \cdot \left(x - (1 - \sqrt{5})\right)$$

h) $2(x+2)^2$ (bin. F.)

i) Dieser Term ist nicht faktorisierbar, denn die Gleichung $4x^2 - 4x + 8 = 0$ hat keine Lösung, denn ihre Diskriminante $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 8 < 0$ ist negativ.
Dies verwendet den Satz ganz unten in der Box von Satz 1; Ausklammern von 4 (oder jeder anderen Zahl ungleich Null) ist aber natürlich möglich: $4x^2 - 4x + 8 = 4(x^2 - x + 2)$.

Lösung zu Aufgabe 14.10 ex-faktorisierungsregel

Nehmen wir an, wir haben Zahlen z_1 und z_2 gefunden mit $z_1 + z_2 = b$ und $z_1 z_2 = c$. Dann gilt wie gewünscht

$$(x + z_1)(x + z_2) = x^2 + xz_2 + xz_2 + z_1 z_2 = x^2 + x(z_1 + z_2) + z_1 z_2 = x^2 + xb + c = x^2 + bx + c.$$

Lösung zu Aufgabe 14.11 ex-gleichungen-faktorisieren

a) $(x+3)(x+8)=0$, also $x+3=0$ oder $x+8=0$ und damit $x_1=-3$, $x_2=-8$.

b) Ausmultiplizieren, x subtrahieren, faktorisieren: $(x+4)(x+6)=0$, also $x_1=-4$, $x_2=-6$.

c) $(x-4)(x+8)=0$, also $x_1=4$, $x=-8$.

d) Durch 3, alles auf eine Seite: $(x+5)(x-6)=0$, also $x_1=-5$, $x_2=6$.

e) $2x$ subtrahieren, x ausklammern: $x(x^2-2)=0$, also $x=0$ oder $x^2-2=0$, also $x_1=0$, $x_2=-\sqrt{2}$, $x_3=\sqrt{2}$.

f) Ausquadrieren, 4 subtrahieren, x ausklammern: $x(x+4)=0$, also $x_1=0$, $x_2=-4$.

:

Lösung zu Aufgabe 14.12 ex-gleichungen-faktorisieren-hq

a) $x(x+7)(x-3)=0$, also $x_1=0$, $x_2=-7$, $x_3=3$.

b) $(x+1)(x+3)(x+2)(x+4)=0$, also $x_1=-1$, $x_2=-2$, $x_3=-3$, $x_4=-4$.

c) $(x^2+1)^2=0$, also $x^2=-1$ und damit $\mathbb{L}=\varnothing$.

d) Durch 4, minus $24x$, x ausklammern: $x(x^4-x^2-6)$. Schreibt man in der Klammer y anstelle von x^2, erhält man: $x(y^2-y-6)=x(y-3)(y+2)$. Ersetzt man wieder y durch x^2 erhält man: $x(x^2-3)(x^2+2)=0$ und damit $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$. (Der letzte Klammerausdruck x^2+2 ist stets positiv und somit nie Null).

e) $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})\cdot x\cdot(x+5)(x-6)=0$, also $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$, $x_3=0$, $x_4=-5$, $x_5=6$.

f) $(x^2+2)\cdot x\cdot(x^2+1)=0$. Die beiden Klammerausdrücke sind immer positiv, die einzige Lösung ist also $x=0$.

Lösung zu Aufgabe 14.13 ex-schnitt-normalparabel-gerade

Die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen zweier Funktionen erhält man, indem man die Funktionsterme (y-Koordinaten) gleichsetzt.

a) $x^2=x+1$, Lösungen $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{3}{2}$. Für die y-Koordinaten setzt man die erhaltenen x-Koordinaten in eine der beiden Funktionen ein (in welche spielt keine Rolle, da beide das gleich ergeben müssen). Schnittpunkte: $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$.

b) $x^2=-\frac{1}{2}x+1$, Lösungen $x_1=\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$, $x_2=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$.
Schnittpunkte: $\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{4},\frac{\sqrt{17}+9}{8}\right)$ und $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4},\frac{9-\sqrt{17}}{8}\right)$

c) $x^2=2x-1 \;\Leftrightarrow\; x^2-2x+1=0 \;\Leftrightarrow\; (x-1)^2=0$ also $x=1$ als einzige Lösung. Schnittpunkt $(1,1)$.

d) Die Gleichung $x^2=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ hat keine Lösung. Die Gerade schneidet die Parabel nicht.

Lösung zu Aufgabe 14.14 ex-normalparabel-leitlinie

a) Wegen $\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ liegt $Q=\left(-\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$ auf der Normalparabel.
Mit Hilfe eine Skizze berechnet man die Abstände $\overline{\ell Q}=\frac{9}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$ und (mit Pythagoras)

$$\overline{BP}=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}-0\right)^2+\left(\frac{9}{4}-\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

b) Wir betrachten einen beliebigen Punkt $P=(v,w)$. Mit Hilfe einer Skizze sieht man sofort:

$$\begin{aligned}\overline{\ell P} &= w-(-\frac{1}{4}) = w+\frac{1}{4}\\ \overline{BP} &= \sqrt{v^2+\left(w-\frac{1}{4}\right)^2} \qquad \text{nach Pythagoras}\end{aligned}$$

Wenn P auf der Parabel zu B und ℓ liegt, so folgern sukzessive

$$\begin{aligned}
& & \overline{\ell P} &= \overline{BP} & \\
&\Rightarrow & w+\frac{1}{4} &= \sqrt{v^2+\left(w-\frac{1}{4}\right)^2} & &|(\cdot)^2\\
&\Rightarrow & \left(w+\frac{1}{4}\right)^2 &= v^2+\left(w-\frac{1}{4}\right)^2 & \\
&\Rightarrow & w^2+\frac{1}{2}w+\frac{1}{16} &= v^2+w^2-\frac{1}{2}w+\frac{1}{16} & &|-w^2+\frac{1}{2}w-\frac{1}{16}\\
&\Rightarrow & w &= v^2 &
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung bedeutet, dass $P=(v,w)$ auf der Normalparabel liegt.
Liegt umgekehrt $P=(v,w)$ auf der Normalparabel, so gilt $w=v^2$ und man kann alle Folgepfeile $\Rightarrow$ umdrehen; beachten Sie dabei: Das Wurzelziehen, das das Quadrieren rückgängig macht, ist wegen $w+\frac{1}{4}\geq w=v^2\geq 0$ erlaubt.

Lösung zu Aufgabe 14.15 ex-normalparabel-tangente

Die Bedingung, dass P auf der Tangente liegt, ist $g(p)=p^2$, d.h.

$$\begin{aligned} mp+q &= p^2 & &|-mp\\ q &= p^2-mp \end{aligned}$$

D.h. $g(x)=mx+p^2-mp$. Die Bedingung, dass Tangente und Normalparabel genau einen Schnittpunkt haben, bedeutet, dass die Gleichung $f(x)=g(x)$ genau eine Lösung hat (Gleichung für x). Wir bringen diese Gleichung auf «Standardform»:

$$\begin{aligned} x^2 &= mx+p^2-mp & &|-mx-(p^2+mp)\\ x^2-mx-(p^2-mp) &= 0 \end{aligned}$$

Unsere Gleichung hat genau eine Lösung, wenn ihre Diskriminante $m^2+4(p^2-mp)$ Null ist:

$$\begin{aligned} m^2+4(p^2-mp) &= 0\\ m^2-4mp+4p^2 &= 0\\ (m-2p)^2 &= 0\\ m-2p &= 0\\ m &= 2p \end{aligned}$$

Resultat: Die Steigung der Tangente an die Normalparabel im Punkt (p,p^2) ist $m=2p$ und ihr Achsenabschnitt ist $q=p^2-mp=p^2-2p\cdot p=-p^2$. Damit ist die Tangentengleichung $g(x)=2px-p^2$.

Lösung zu Aufgabe 14.16 ex-normalparabel-reflexionseigenschaft

Da L und B gleich weit von P entfernt sind (Definition der Parabel), ist das Dreieck BPL gleichschenklig und w ist die Winkelhalbierende seines Innenwinkels bei P.

Insbesondere ist der Winkel $\angle BPM$ genauso gross wie der Scheitelwinkel von $\angle MPL$; dies bedeutet, dass die Gerade w den einfallenden Strahl s in den Brennpunkt reflektiert. Deswegen genügt es zu zeigen, dass w die Tangente an die Normalparabel in P ist.

Dazu genügt es zu zeigen, dass M und P auf dieser Tangente liegen. Für P ist dies klar.

Da M der Mittelpunkt von $B=\left(0,\frac{1}{4}\right)$ und $L=\left(p,-\frac{1}{4}\right)$ ist, gilt $M=\left(\frac{p}{2},0\right)$. Setzt man die x-Koordinate von M in die Tangentengleichung $t(x)=2px-p^2$ (siehe Merkebox 14.7) ein, so erhält man $t\left(\frac{p}{2}\right)=2p\cdot\frac{p}{2}-p^2=0$, was die y-Koordinate von M ist. Dies bedeutet, dass auch M auf der Tangente liegt.

Lösung zu Aufgabe 14.17 ex-normalparabel-gemeinsame-tangente

Die Tangente an die Normalparabel hat die Funktionsgleichung $t(x) = 2px - p^2$, wobei p die (noch unbekannte) x-Koordinate des Berührungspunktes ist.

Nun ist p so zu bestimmen, dass sich die Tangente $t(x)$ und die Parabel $g(x)$ in genau einem Punkt schneiden; äquivalent bedeutet dies, dass die Gleichung $t(x) = g(x)$ genau eine Lösung haben soll (denn jede Lösung ist eine x-Koordinate eines Schnittpunkts).

$$\begin{aligned} t(x) &= g(x) \\ -(x-2)^2 + \frac{3}{2} &= 2px - p^2 \\ -x^2 + 4x - 4 + \frac{3}{2} &= 2px - p^2 && \mid -2px + p^2 \\ -x^2 + (4-2p)x + \left(-\frac{5}{2} + p^2\right) &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung für x hat genau dann genau eine Lösung, wenn ihre Diskriminante $D = (4-2p)^2 + 4\left(-\frac{5}{2} + p^2\right)$ Null ist (und dann ist diese Lösung nach der Mitternachtsformel $x = \frac{-(4-2p)}{-2} = 2 - p$). Dies ergibt eine Gleichung für p:

$$\begin{aligned} (4-2p)^2 + 4\left(-\frac{5}{2} + p^2\right) &= 0 \\ 16 - 16p + 4p^2 - 10 + 4p^2 &= 0 \\ 8p^2 - 16p + 6 &= 0 \\ 4p^2 - 8p + 3 &= 0 \\ p_{1,2} &= \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{8} = \frac{8 \pm 4}{8} = 1 \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Setzen wir diese beiden Lösungen $p_1 = \frac{3}{2}$ und $p_2 = \frac{1}{2}$ in die Tangentengleichung $t(x) = 2px - p^2$ ein, so erhalten wir die beiden Tangenten $t_1(x) = 3x - \frac{9}{4}$ und $t_2(x) = x - \frac{1}{4}$.
Die Berührungspunkte für die Tangente t_1 sind $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ und $\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{4}\right)$, wobei die x-Koordinate des Berührpunkts mit der zweiten Parabel $g(x)$ mit der obigen Formel $x = 2 - p$ zu $2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ berechnet wurde.
Die Berührungspunkte für die Tangente t_2 sind $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ und $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$.

Lösung zu Aufgabe 14.18 ex-normalparabel-verschieben

a) $f(x) = x^2 - 2$

b) $f(x) = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

c) $f(x) = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$

d) $f(x) = (x+2)^2 - 3 = x^2 + 4x + 1$

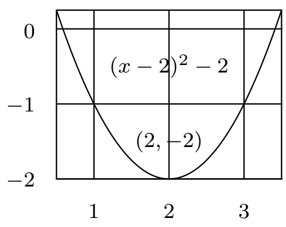
Lösung zu Aufgabe 14.19 ex-scheitelpunkt-parabel-bestimmen

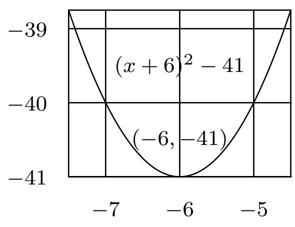
a) $f(x) = x^2 - 4x + 4 - 4 + 2 = (x-2)^2 - 2$. Also Scheitelpunkt $S = (2, -2)$.

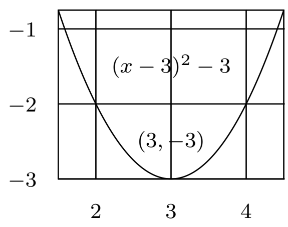
b) $f(x) = x^2 + 12x + 36 - 36 - 5 = (x+6)^2 - 41$. Also Scheitelpunkt $S = (-6, -41)$.

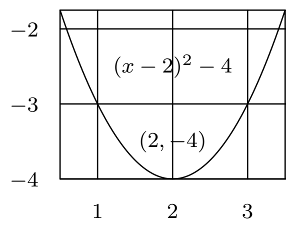
c) $f(x) = x^2 - 6x + 9 - 9 + 6 = (x-3)^2 - 3$. Also Scheitelpunkt $S = (3, -3)$.

d) $f(x) = x^2 - 4x + 4 - 4 = (x-2)^2 - 4$. Also Scheitelpunkt $S = (2, -4)$.





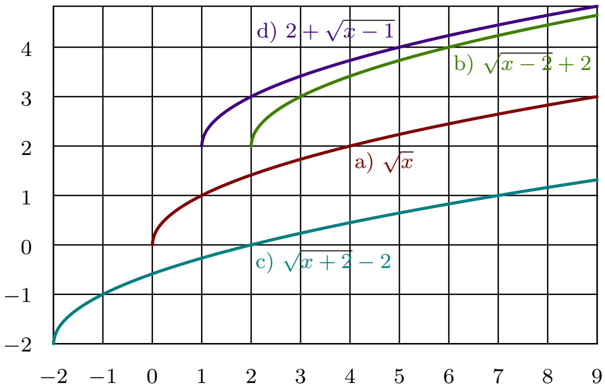




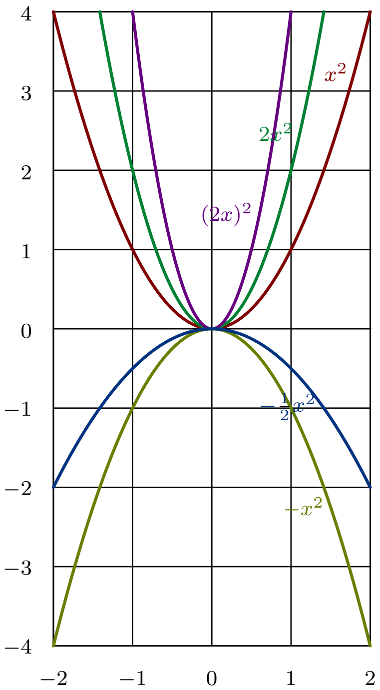
Lösung zu Aufgabe 14.20 ex-scheitelpunkt-parabel-bestimmen-allgemein
Man ergänzt wieder quadratisch:
$f(x) = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}$.
Der Scheitelpunkt hat also die Koordinaten $S = \left(-\frac{b}{2},\, c - \frac{b^2}{4}\right)$.

Lösung zu Aufgabe 14.21 ex-wurzelgraphen-verschieben

a) «Standardgraph der Wurzelfunktion» (halbe liegende Parabel).
b) Verschiebung um 2 nach rechts, 2 nach oben.
c) Verschiebung um 2 nach links, 2 nach unten.
d) Verschiebung um 1 nach rechts, 2 nach oben.



Lösung zu Aufgabe 14.22 ex-normalparabeln-oeffnungsfaktor
Aufgabe b) kann sowohl als Streckung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{2}$, wie auch als Streckung mit Faktor 4 in y-Richtung betrachtet werden, da $(2x)^2 = 4 \cdot x^2$.



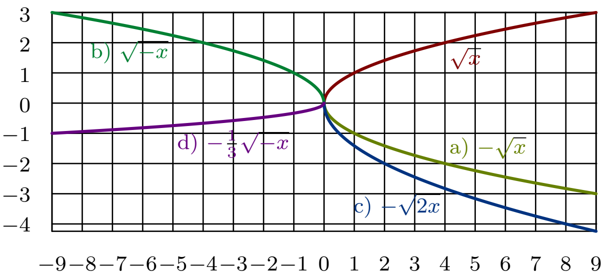
Lösung zu Aufgabe 14.23 ex-wurzelfunktionen-strecken

a) Ganze Funktion wird mit -1 multipliziert. Also Spiegelung an x-Achse.

b) x wird durch $-x$ ersetzt, also Streckung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{-1} = -1$, d.h. Spiegelung an der y-Achse.

c) Ausgehend von $-\sqrt{x}$ wird x durch $2x$ ersetzt, d.h. es wird mit Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung gestreckt.
Man könnte auch schreiben $-\sqrt{2x} = -\sqrt{2} \cdot \sqrt{x}$, d.h. der «normale» Wurzelfunktionsgraph wird mit Faktor $-\sqrt{2}$ in y-Richtung gestreckt.

d) Ausgehend von $\sqrt{-x}$ wird der Funktionsgraph mit Faktor $-\frac{1}{3}$ in y-Richtung gestreckt.



Lösung zu Aufgabe 14.24 ex-scheitelpunkt-allgemein

a) $f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ Der Faktor a bewirkt eine Streckung in y-Richtung, ändert also die x-Koordinate des Scheitelpunktes nicht. Die x-Koordinate ist also die gleiche wie von der Parabel $f(x) = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$, also $-\frac{b}{2a}$.

b) Wenn es Lösungen gibt, sind dies die Schnittpunkt der Parabel mit der x-Achse (dort wo der y-Wert eben Null ist).

c) $x_1 + x_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = \frac{1}{2}\frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{2a}$.
Die Symmetrieachse der Parabel ist parallel zur y-Achse und geht durch den Scheitelpunkt. Wenn es also Schnittpunkte mit der x-Achse gibt, sind diese gleich weit von der Symmetrieachse entfernt. Der Scheitel liegt also dazwischen, d.h. dessen x-Koordinate ist der Durchschnitt der x-Achsenschnittpunkte.

Lösung zu Aufgabe 14.25 ex-gleichungen-faktorisieren-repe

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer seiner Faktoren Null ist.

a) $x(x^2+2x+1)(x-1)(x-2) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x(x+1)^2(x-1)(x-2) = 0$. Also $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x = 1$, $x = 2$.

b) $x^3 - 7x^2 + 12x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x(x^2 - 7x + 12) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x(x-3)(x-4) = 0$. Also $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$.

c) $(x^2-2)(x^3-x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \cdot x \cdot (x-1)(x+1) = 0$ Also $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = 0$, $x = 1$, $x = -1$.

d) $x^4 + 4 = 4x^2 \quad\Leftrightarrow\quad x^4 - 4x^2 + 4 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x^2-2)^2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left((x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\right)^2 = 0$. Also $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$.

Lösung zu Aufgabe 14.26 ex-textaufgaben-quadr-gleichung-repe

(a) Beim Loslassen hat der Ball die Höhe $h(0) = 1$ Meter über dem Boden.
Wir suchen t so, dass $h(t) = 8$. Das ergibt eine Gleichung für t:

$$\begin{aligned} 1 + 12t - 5t^2 &= 8 && \mid -1 - 12t + 6t^2 \\ 0 &= 5t^2 - 12t + 7 \\ t_{1,2} &= \frac{12 \pm \sqrt{144-140}}{10} = \frac{12 \pm 2}{10} = \frac{6 \pm 1}{5} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir zwei Lösungen $t_1 = 1$ und $t_2 = 1.4$. Die erste Lösung ist die gesuchte, die zweite Lösung ist der Zeitpunkt, zu der der Ball wieder auf die Höhe von 8 m zurückfallen würde, wenn die Decke nicht da wäre.

1. Möglichkeit der Scheitelberechnung: Die Funktion ist quadratisch, der Graph also eine Parabel mit Symmetrieachse parallel zur y-Achse. Der Scheitel muss also zwischen t_1 und t_2 (gleiche Höhe) liegen. Also $S = (1.2, h(1.2)) = (1.2, 8.2)$.

2. Möglichkeit der Scheitelberechnung: Durch quadratisches Ergänzen:

$$\begin{aligned} h(t) &= -5\left(t^2 - \frac{12}{5}t - \frac{1}{5}\right) = \\ &= -5\left((t^2 - \frac{12}{5}t + \ + \left(-\frac{6}{5}\right)^2 - \left(-\frac{6}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}\right) = \\ &= -5\left(t - \frac{6}{5})^2 - \left(\frac{6}{5}\right)^2 - \frac{1}{5}\right) \\ &= -5\left(t - \frac{6}{5})^2\right) + \frac{36}{5} + 1 = \\ &= -5(t-1.2)^2 + 8.2 \end{aligned}$$

Woraus man die Scheitelpunktskoordinaten $S = (1.2, 8.2)$ ablesen kann.

3. (einfachste) Möglichkeit der Scheitelberechnung: Die x-Koordinate des Scheitels ist laut der allgemeinen Formel $\frac{-b}{2a} = \frac{-12}{-10} = 1.2$.

(b) **1. Variante:** Die einfachste Variante ist, die Rechteckseiten mit den Längen $(1-x)$ und $(1+x)$ zu beschreiben. Die Fläche ist dann

$$F = (1+x)(1-x) = 1 - x^2$$

Die Fläche ist offensichtlich dann am grössten (nämlich 1), wenn $x = 0$ ist (denn $x^2 \geq 0$ mit Gleichheit genau für $x = 0$), wenn unser Rechteck mit Umfang 4 also das Einheitsquadrat ist.

2. Variante: Ist x die Breite des Rechtecks, so ist $2 - x$ seine Länge (da Breite + Länge = 2 = halber Umfang). Die Fläche des Rechtecks in Abhängigkeit von x ist

$$f(x) = x(2-x) = -x^2 + 2x.$$

Dies ist eine quadratische Funktion und ihr Graph ist eine Parabel, die nach unten geöffnet ist (wegem dem Öffnungsfaktor -1). Die y-Koordinate des Scheitels ist der maximale Wert von f (= grösstmögliche Fläche). Die x-Koordinate des Scheitels ist $\frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1$.

Also ist das Rechteck mit Seitenlänge 1 und 1 alias das Einheitsquadrat die grösste Fläche unter allen Rechtecken des Umfangs 4.

Lösung zu Aufgabe 14.27 ex-tangenten-repe

(a) Die möglichen Tangenten hängen von p (= der x-Koordinate des Berührpunkts) ab und sind durch $t(x) = 2px - p^2$ beschrieben.

Genau dann liegt unser Punkt $Q = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ auf dem Graphen von $t(x) = 2px - p^2$ (= der Tangente zu p), wenn $t\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ gilt. Wir formen diese Bedingung um:

$$\begin{aligned} t\left(\frac{1}{4}\right) &= -\frac{1}{2} \\ 2p\frac{1}{4} - p^2 &= -\frac{1}{2} && \left|+\frac{1}{2}\right. \\ -p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2} &= 0 && |\cdot(-2) \\ 2p^2 - p - 1 &= 0 \\ p_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \end{aligned}$$

Damit lauten die Tangentengleichungen

$$\begin{aligned} t_1(x) &= 2x - 1 && \text{für } p_1 = 1 \text{ und} \\ t_2(x) &= -x - \frac{1}{4} && \text{für } p_2 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(b) Da die x-Koordinaten der Berührungspunkte bekannt sind, können die Geradengleichungen aufgeschrieben werden:

$t_1(x) = 2x - 1$ für $p = 1$ und $t_2(x) = 6x - 9$ für $p = 3$. Um zu überprüfen, dass diese Geraden auch Tangenten an g sind, überprüft man, ob die Gleichung $g(x) = t(x)$ genau eine Lösung hat:

- Für $t_1(x) = g(x)$: Umformen der Gleichung: $2x - 1 = -(x^2 - 8x + 16) + 6 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 9 = 0$
  Diskriminante $D = 36 - 36 = 0$, also genau eine Lösung (auch klar wegen $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$).
  Also ist die Tangente t_1 an (den Graphen von) f auch eine Tangente an g.
  Die Lösung ist $x = 3$; dies ist die x-Koordinate des Berührpunkts.
- Für $t_2(x) = g(x)$: Umformen der Gleichung $6x - 9 = -(x^2 - 8x + 16) + 6 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 1)^2 = 0$.
  Auch diese Gleichung hat genau eine Lösung $x = 1$. Also ist die Tangente t_2 an f auch eine Tangente an g.

Die Berührungspunkte dieser beiden Tangenten an g sind $B_1 = (3, t_1(3)) = (3, 5)$ und $B_2 = (1, t_2(1)) = (1, -3)$.

(c) Sei $Q = (v, w)$ ein beliebiger Punkt unterhalb der Normalparabel (d.h. $w < v^2$). Eine (von der x-Koordinate p des Berührpunkts abhängige) Tangente $t(x) = 2px - p^2$ an die Normalparabel geht genau dann durch den Punkt Q, wenn $t(v) = w$ gilt. Wir formen diese Bedingung wie folgt um:

$$\begin{aligned}
t(v) &= w \\
2pv - p^2 &= w && \mid -w \\
-p^2 + 2vp - w &= 0 && \mid \text{Mitternachtsformel mit } a = -1,\ b = 2v,\ c = -w \\
p_{1,2} &= \frac{-2v \pm \sqrt{4v^2 - 4w}}{-2} = v \pm \sqrt{v^2 - w}
\end{aligned}$$

Nun ist klar, dass v genau in der Mitte zwischen $p_2 = v - \sqrt{v^2 - w}$ und $p_1 = v + \sqrt{v^2 - w}$ liegt. Beachte, dass p_1 und p_2 die x-Koordinaten sind, für die die zugehörigen Tangenten an die Normalparabel durch Q gehen.

(Die Bedingung, dass Q unterhalb der Normalparabel liegt, sorgt dafür, dass der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv ist und es somit zwei Tangenten durch Q gibt.)