Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

12 Trigonometrie

Fast alle Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen (Cosinus, Sinus und Tangens) können aus der **Bewegung eines Punktes** auf dem **Einheitskreis** (mit Geschwindigkeit 1) hergeleitet werden.

Definition 12.1 Einheitskreis

Der **Einheitskreis** ist der Kreis im 2-dimensionalen Koordinatensystem mit Zentrum $(0,0)$ und Radius 1.

Definition 12.2 Winkel und Drehsinn

Winkel im Einheitskreis werden von der positiven x-Achse in Richtung der positiven y-Achse gemessen. D.h. der **positive Drehsinn** im gebräuchlichen Koordinatensystem entspricht dem **Gegenuhrzeigersinn**.

Definition 12.3 P_α

Für einen beliebigen Winkel α ist P_α derjenige Punkt auf dem Einheitskreis mit $\sphericalangle XOP_\alpha = \alpha$ (links steht der orientierte Winkel), wobei $X = (1,0)$ und $O = (0,0)$.

Definition 12.4 Cosinus und Sinus

Für jeden Winkel α ist $\cos(\alpha)$ die x-Koordinate von P_α und $\sin(\alpha)$ ist die y-Koordinate von P_α. Kurz:

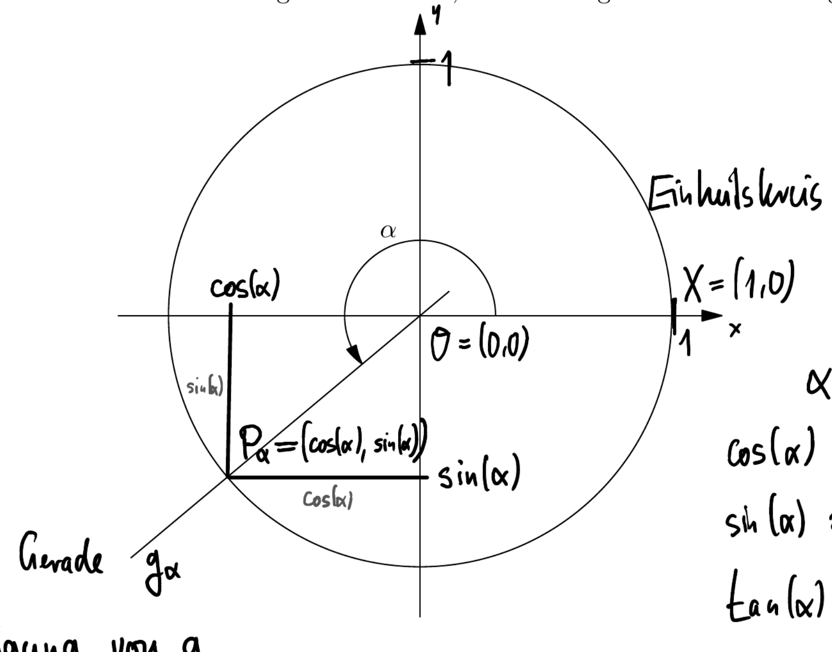
$$P_\alpha = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$$

Besser: Für jeden Winkel alpha ist tan(alpha) die Steigung der Geraden g_alpha=OP_alpha.

Definition 12.5 Tangens und g_α

Die Funktion $\tan(\alpha)$ liefert für jeden Winkel α die **Steigung** der Geraden $g_\alpha = OP_\alpha$.

Aufgabe 12.1 Beschriften Sie die folgende Skizze so, dass die obigen Definitionen möglichst gut illustriert werden!



Alles hängt nur vom Winkel α ab

$\alpha \approx 220^\circ$

$\cos(\alpha) \approx -0.8$

$\sin(\alpha) \approx -0.7$

$\tan(\alpha) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-0.7}{-0.8} = \frac{7}{8} = 0.875$

$\tan(\alpha)$ = Steigung von g_α

Aufgabe 12.2 Zeichnen Sie einen Einheitskreis mit 8 cm Durchmesser. Schalten Sie Ihren Taschenrechner ins Gradmass um. Drücken Sie Home, 5, 2 und stellen dann die Option «Winkel» auf Grad um. Speichern Sie die Einstellungen als Standard.

a) Zeichnen Sie die Punkte P_{55°, P_{290°, P_{-190° und P_{380° ein. Bestimmen Sie dann durch Messen die Cosinus- und Sinuswerte dieser Winkel. *Achtung: Es muss in Einheiten, nicht in cm gemessen werden!*

b) Berechnen Sie mit dem Taschenrechner die Cosinus- und Sinuswerte der Winkel aus Teilaufgabe a). *Achtung: Der Taschenrechner muss im Gradmass (DEG) rechnen, und nicht im Bogenmass (RAD).*

c) Bestimmen Sie, ebenfalls durch Messen, die Tangenswerte der Winkel aus Teilaufgabe a) und überprüfen Sie Ihre Messungen mit dem Taschenrechner.

d) Für welche Winkel α (es gibt unendlich viele!) gilt $\sin(\alpha) = 0.8$? Bestimmen Sie die Antwort durch Konstruieren und Abmessen. Beschreiben Sie alle Lösungen (unendlich viele). Lösen Sie die Gleichung mit dem TR und interpretieren Sie das Resultat.

e) Für welche Winkel α gilt $\cos(\alpha) = -0.2$? Bestimmen Sie die Antwort durch Konstruieren und Abmessen. Beschreiben Sie alle Lösungen (unendlich viele). Lösen Sie die Gleichung mit dem TR und interpretieren Sie das Resultat.

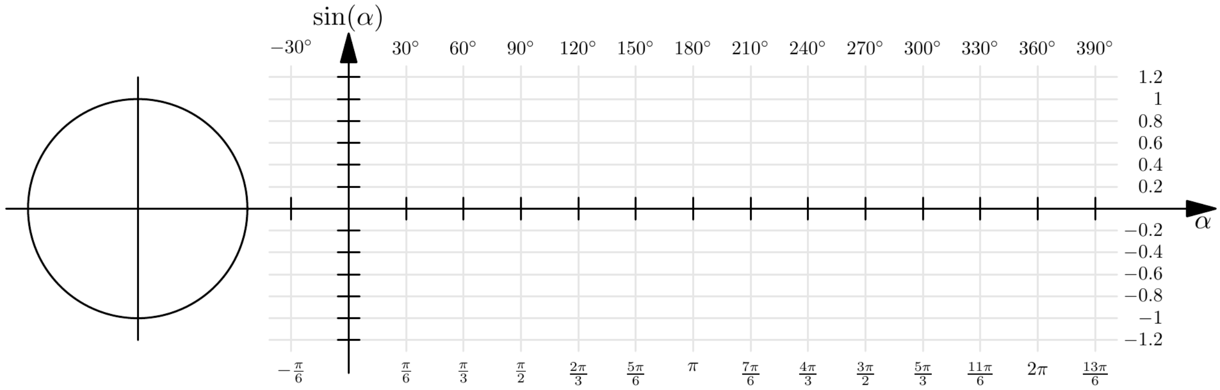
f) Für welche Winkel α (es gibt unendlich viele!) gilt $\tan(\alpha) = -2$? Bestimmen Sie die Antwort durch Konstruieren und Abmessen. Beschreiben Sie alle Lösungen (unendlich viele). Lösen Sie die Gleichung mit dem TR und interpretieren Sie das Resultat.

g) Für welche Winkel α gilt $\sin(\alpha) = 4.2$?

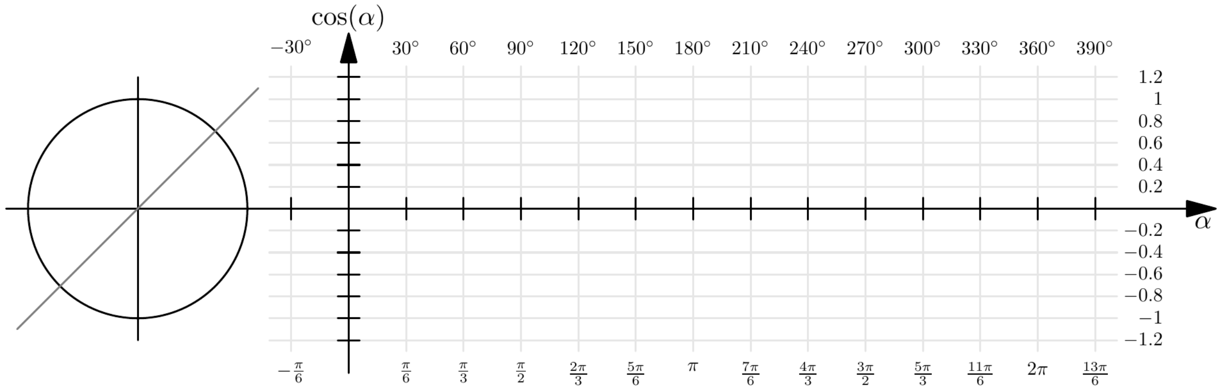
h) Für welche Winkel α gilt $\cos(\alpha) = -2$?

Aufgabe 12.3 Ziel dieser Aufgabe ist, die Graphen der Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion in die vorgegebenen Koordinatensysteme einzuzeichnen.

a) Graph der Sinusfunktion: Markieren Sie für alle Winkel α zwischen $-30°$ und $390°$, die Vielfache von $15°$ sind, den Punkt P_α im Kreis links und nutzen Sie jeweils eine horizontale Linie, um den entsprechenden Punkt des Graphen der Sinusfunktion im Koordinatensystem rechts einzuzeichnen.

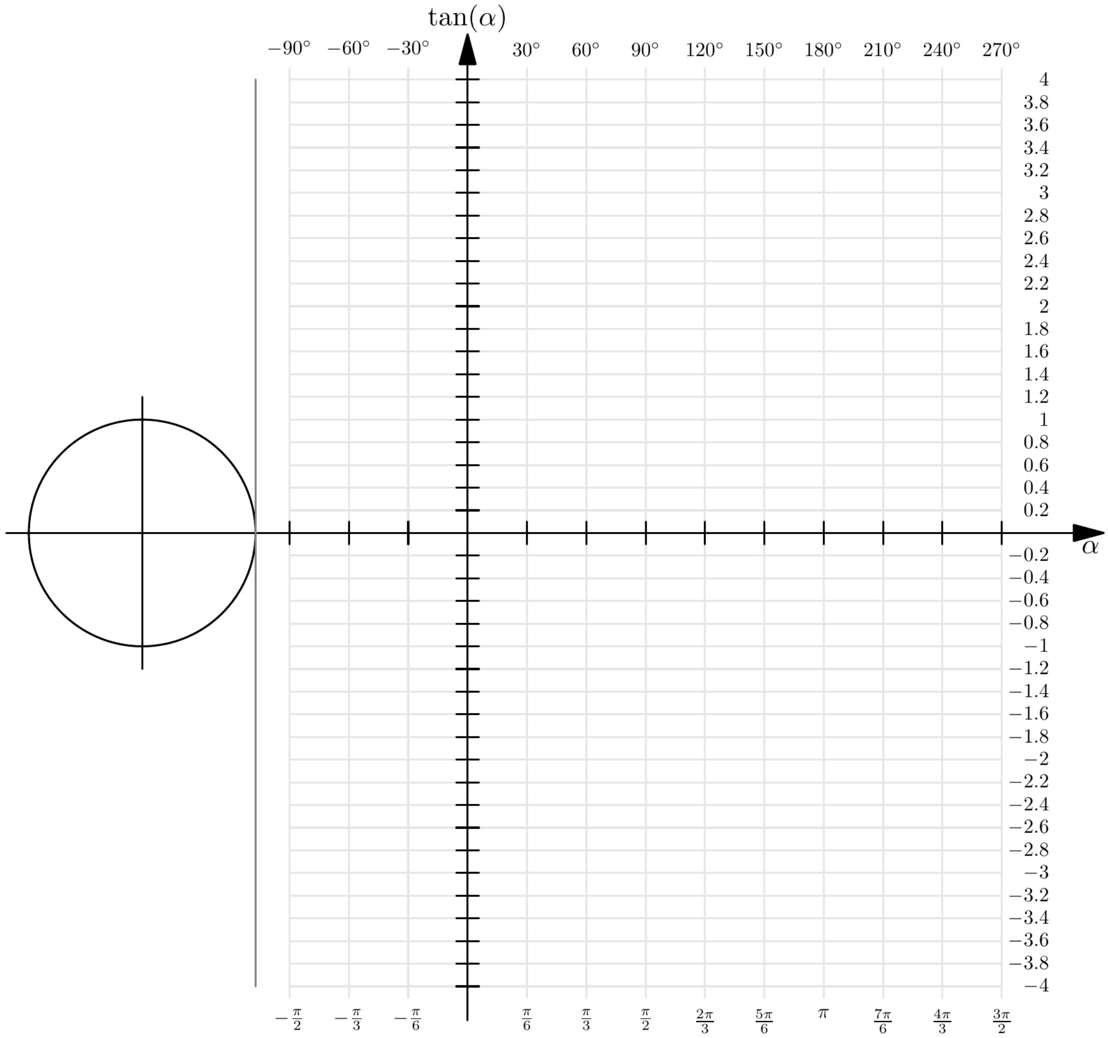


b) Graph der Kosinusfunktion: Markieren Sie für alle Winkel α zwischen $-30°$ und $390°$, die Vielfache von $15°$ sind, den Punkt P_α im Kreis links und nutzen Sie die hellgraue erste Winkelhalbierende, um den entsprechenden Punkt des Graphen der Kosinusfunktion im Koordinatensystem rechts einzuzeichnen.



Mittwoch, 30.11.2022: Bis hier, sonst Hausaufgabe bis Montag.

c) Skizzieren Sie den Graphen der Tangensfunktion! Vorgehen: Markieren Sie für alle Winkel α zwischen $-90°$ und $270°$, die Vielfache von $15°$ sind, den Punkt P_α im Kreis. Begründen Sie genau, was die Steigung der Gerade g_α mit der Tangente $x = 1$ an den Einheitskreis zu tun hat.



Aufgabe 12.4 Bestimmen Sie mit einem Tabellenkalkulationsprogramm oder direkt mit Python die Koordinaten eines regelmässigen 5-Ecks und stellen Sie es graphisch dar!

Aufgabe 12.5 Für die Herleitung folgender trigonometrischer Identitäten ist eine gute Skizze nötig. Zeigen Sie, dass für beliebige Winkel α gilt:

a) $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$,

b) $\big(\sin(\alpha)\big)^2 + \big(\cos(\alpha)\big)^2 = 1$,

c) $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$,

d) $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.

Aufgabe 12.6 Bestimmen Sie die **exakten** Cosinus-, Sinus- und Tangenswerte der Winkel $30°$ und $45°$. Machen Sie dazu eine Skizze im Einheitskreis und suchen Sie spezielle rechtwinklige Dreiecke.

Erstellen Sie dann eine Tabelle mit allen trigonometrischen Funktionswerten aller Vielfachen von $30°$ und $45°$ zwischen $0°$ und $360°$.

12.1 Bogenmass

Es stellt sich heraus, dass es mathematisch am «zweckmässigsten» ist, einen Winkel durch die Länge des entsprechenden Bogens auf dem Einheitskreis anzugeben.

$225°$	α	$-30°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$210°$
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos(\alpha)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sin(\alpha)$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
1	$\tan(\alpha)$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht definiert (∞)	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\frac{\sin}{\cos} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2} = \frac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\sin}{\cos} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}$$

$$\boxed{(\cos(\alpha))^2} = \cos(\alpha)^2 = \cos^2(\alpha) \neq \cos(\alpha^2)$$

$$\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{3}\cdot\cancel{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Definition 12.6 Bogenmass

Ein Winkel α im Bogenmass ist die Länge des entsprechenden Bogens auf dem Einheitskreis von $(1, 0)$ bis P_α (in positivem Drehsinn), gemessen in Vielfachen der Einheitslänge.

Ein Winkel im Bogenmass ist also eine Zahl (ohne Masseinheit).

Gelegentlich schreibt man die Einheit **rad** (gelesen «Radiant») dazu, um eine solche Zahl als Winkel im Bogenmass zu kennzeichnen.

Der Name *Radiant* kommt daher, dass die Länge des Kreisbogens in Vielfachen des *Radius* angegeben wird.

Aufgabe 12.7 Vervollständigen Sie folgende Tabelle mit exakten Werten und bestimmen Sie die beiden Umrechnungsfunktionen $g(r)$ von Radiant in Grad und $r(g)$ von Grad in Radiant!

Grad	0°	360°	180°	90°	−90°			225°
Radiant	0					$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	

$g(r) = r \cdot \frac{180}{\pi}$

$r(g) = g \cdot \frac{\pi}{180}$

Winkel in Grad — Winkel in Radiant

12.2 Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

Der Begriff «Trigonometrie» kommt aus dem Griechischen und bedeutet Dreiecksvermessung (τριγωνον *trígonon* «Dreieck» und μετρον *métron* «Mass»). [1]

Aufgabe 12.8 In dieser Aufgabe sind zwei Skizzen nebeneinander zu erstellen, ein Dreieck und ein Einheitskreis.

- Zeichnen Sie ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle GHA$ mit Winkel $\gamma \approx 25°$ bei G und rechtem Winkel bei H. Beschriften Sie den Winkel γ und die Seiten g, h, und a.
- Zeichnen Sie daneben einen Einheitskreis mit dem Punkt P_γ (gleicher Winkel γ wie in Ihrem Dreieck).
- Zeichnen Sie das Stützdreieck unter der Strecke OP_γ.
- Begründen Sie, warum das Stützdreieck und Ihr Dreieck $\triangle GHA$ ähnlich sind. Zwei gleiche Winkel: 90° und γ
- Beschriften Sie die Längen der Stützdreiecksseiten.
- Geben Sie mit Hilfe des Stützdreiecks die drei Seitenverhältnisse $g : h$, $a : h$ und $g : a$ an.

Also

Merke Sinus und Cosinus im rechtwinkligen Dreieck

Sei δ ein Winkel ($\neq 90°$) in einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck. Die diesem Winkel *an*liegende Kathete heisst **Ankathete**, die dem Winkel *gegen*überliegende Kathete heisst **Gegenkathete**. Es gilt:

$$\sin(\delta) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos(\delta) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \tan(\delta) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Dazu gibt es folgende Eselsbrücke[2]: **«GAGA HühnerHof AG»**, der in folgender Tabelle zusammengefasst wird:

sin	cos	tan	cot
G	A	G	A
H	H	A	G

Zum Beispiel ist der Cosinus der Quotient **A**nkathete durch **H**ypotenuse. Hinweis: cot steht für Cotangens und ist für fast alle Winkel einfach der Kehrwert des Tangens.

$$\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Trigonometrie
[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Merkspruch

Aufgabe 12.9 Von einem rechtwinkligen Dreieck sind in den folgenden Teilaufgaben jeweils ein Winkel und eine Seite bekannt. Berechnen Sie die fehlenden Seiten mit dem TR. Geben Sie die Resultate auf 4 signifikante Stellen gerundet an (d.h. egal, wo das Komma ist, es stehen vier Stellen da (führende Nullen nicht mitgezählt)). Überprüfen Sie Ihre Resultate mit einer kleinen Handskizze auf ihre Plausibilität.

a) $\alpha = 20°$, $a = 4$ b) $\beta = 50°$, $c = 3$ c) $\alpha = 35°$, $b = 5$ d) $\beta = 55°$, $a = 2$

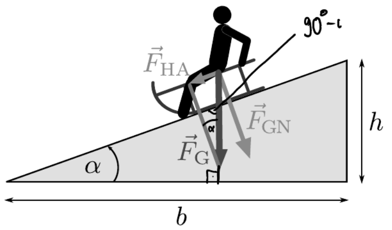
Aufgabe 12.10

a) Aktuelle Gleitschirme haben einen Gleitwinkel von etwa 7° (Winkel zwischen Flugrichtung und der Horizontalen). Normalerweise wird aber die Gleitzahl angegeben, das ist die horizontale Distanz in m, die pro Höhenmeter zurückgelegt wird. Berechnen Sie die Gleitzahl. Welcher trigonometrischen Funktion des Gleitwinkels entspricht die Gleitzahl?

b) Sie stehen in der Wüste von Dubai und der 830 m hohe Burj Khalifa erscheint unter einem Winkel von 20°. Wie weit vom Turm sind Sie entfernt?

$0{,}1736 \approx \sin(10°) = \sin(\alpha) = \frac{F_{HA}}{F_G}$

c) In der Skizze rechts ist $\vec{F}_G$ die Gewichtskraft, die auf die Person inklusive Schlitten wirkt. Mit den beiden anderen Kräften $\vec{F}_{GN}$ (Komponente der Gewichtskraft senkrecht (normal) zum Boden) und $\vec{F}_{HA}$ (Hangabtriebskraft, beschleunigt Schlitten samt Person parallel zum Hang) kann ein rechtwinkliges Dreieck gebildet werden.
Für eine Hangneigung von $\alpha = 10°$: Mit viel Prozent der Gewichtskraft wird die Person mit Schlitten den Hang hinunter gezogen? $\boxed{17{,}36\ \%}$



Grafik: Creative Commons Lizenz Version 3.0, by-nc-sa, Copyright by Bernhard Grotz
http://www.grund-wissen.de/physik/mechanik/kraftwandler-und-getriebe/schiefe-ebene.html

12.3 Arcus-Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen ordnen Winkeln Zahlen zu. Nun wollen wir umgekehrt wissen, welcher Winkel zu einer gegebenen Zahl gehört. z.B.: Für welche Winkel α gilt $\sin(x) = -0.3$? Unendlich viele Lösun

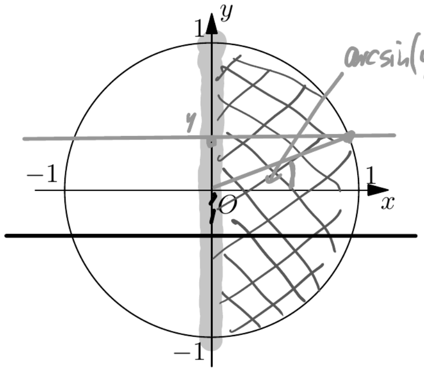
Die trigonometrischen Funktionen besitzen sogenannte **Umkehrfunktionen**, die z.B. aus Sinuswerten wieder Winkel berechnen. Der Name *Arcus-Funktionen* leitet sich davon ab, dass diese Funktionen (in Radiant gemessen) *Bogen*längen liefern (lat. *arcus* für *Bogen*).

Das Problem ist, dass jeder Sinuswert von unendlich vielen Winkeln produziert wird, die normalerweise genau zwei Punkten auf dem Einheitskreis entsprechen (= den Schnittpunkten einer Horizontalen mit dem Einheitskreis).

Da eine Funktion für jedes Argument nur genau einen Wert liefert, stellt sich Frage: Welchen dieser Punkte wählt man für die Berechnung der Umkehrfunktion und wie wählt man den Winkel?

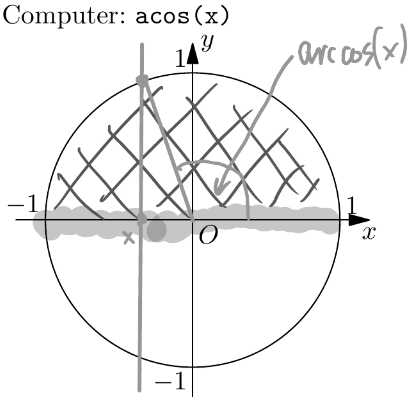
Arcus-Sinus
$y \in [-1, 1]$ ← mögliche Sinuswerte
Mathe: $\arcsin(y) = \sin^{-1}(y)$
Computer: `asin(y)`

−0,3



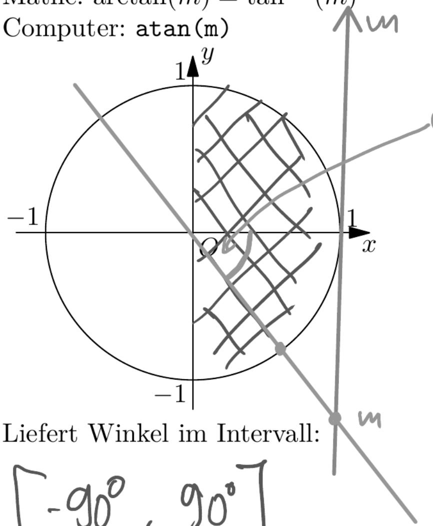
Liefert Winkel im Intervall:
$[-90°, 90°]$

Arcus-Cosinus
$x \in [-1, 1]$
Mathe: $\arccos(x) = \cos^{-1}(x)$
Computer: `acos(x)`



Liefert Winkel im Intervall:
$[0°, 180°]$

Arcus-Tangens
$m \in \mathbb{R}$
Mathe: $\arctan(m) = \tan^{-1}(m)$
Computer: `atan(m)`



Liefert Winkel im Intervall:
$[-90°, 90°]$

Hinweis: Sind Winkel gesucht, die stumpf sein können, empfiehlt es sich, falls möglich, arccos anstatt arcsin zu benutzen. So muss der Winkel am Schluss nicht noch umgerechnet werden.

Definition von arcsin: Für jedes y im Intervall [-1, 1] ist arcsin(y) der eindeutig bestimmte Winkel $(\alpha \in [-90°, 90°]$ mit $\sin(\alpha) = y)$

α mit $\sin(\alpha) = y$
und $\alpha \in [-90°, 90°]$

z.B. $\arcsin(-0{,}3) = -17{,}457\ldots$

Definition von arccos: Für jedes $x \in [-1, 1]$
ist arccos(x) der eindeutig bestimmte Winkel

α mit $\cos(\alpha) = x$
und $\alpha \in [0°, 180°]$

Definition von arctan: Für jedes $m \in \mathbb{R}$

ist arctan(m) der eindeutig bestimmte Winkel

α mit $\tan(\alpha) = m$
und $\alpha \in [-90°, 90°]$

Aufgabe 12.11 ~~Berechnen~~ Bestimme Sie ohne TR mit Hilfe einer Skizze des Einheitskreises:

a) $\arcsin(0)$ b) $\arccos(0)$ c) $\arctan(0)$ d) $\arcsin(1)$

e) $\arccos(1)$ f) $\arctan(1)$ g) $\arcsin(-1)$ h) $\arccos(-1)$

i) $\arctan(-1)$ j) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ k) $\boxed{\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)}$ l) $\arctan\left(\sqrt{3}\right)$

Aufgabe 12.12 Zeichnen Sie (auf Papier) die Funktionsgraphen der Arcusfunktionen $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$ und $\arctan(x)$. Wählen Sie jeweils sinnvolle Skalierungen für die Achsen.

Aufgabe 12.13

a) Moderne Segelflieger haben eine Gleitzahl (siehe Aufgabe 12.10 a)) von ca. 50. Berechnen Sie den entsprechenden Gleitwinkel. *Zusatzaufgabe: Wenn so ein Segelflieger das Matterhorn knapp überfliegt, könnte dieser ohne weitere Auf- und Abwinde im Aargau in Birrfeld landen?*

b) Ein 8 m hoher senkrechter Strommast wirft einen 4 m langen Schatten. Wie gross ist der Einfallswinkel der Sonnenstrahlen? *Zusatzaufgabe: Zu welcher Jahres- und Tageszeit steht die Sonne in St. Gallen so hoch?*

c) Am Anfang einer Passstrasse steht ein Schild mit der Aufschrift «20% Steigung». Was ist also der Winkel dieser Strasse gegenüber der Horizontalen (wenn man annimmt, dass die Steigung überall genau 20 % beträgt)?

d) Eine Downhill-Mountainbikerin zeichnet ihre Talfahrt vom Maschgenkamm nach Quarten am Walensee sowohl mit ihrem Tachometer als auch mit ihrem GPS auf. Nach 8.271 km auf dem Tachometer zeigt das GPS nur 8.115 km an. Sie setzt beide Geräte wieder auf Null und radelt nach Sargans. Dort zeigen beide Geräte bis auf 2 m die gleiche Distanz (19.2 km) an.
Was hat das GPS gemessen und wie steil (Angabe als Winkel und in %) war die Abfahrt im Durchschnitt?

12.4 Harmonische Schwingungen

Die Bewegung eines Massestücks, das an einer metallischen Springfeder aufgehängt schwingt, kann in guter Näherung als *harmonische Schwingung* beschrieben werden.

Eine harmonische Schwingung kann durch eine gestreckte und verschobene Sinusfunktion beschrieben werden. Am einfachsten stellt man sich dabei einen Punkt vor, der eine gleichförmige Kreisbewegung ausführt (d.h. seine (Dreh-)Geschwindigkeit ist konstant). Dann beschreibt die y-Koordinate des Punktes eine harmonische Schwingung.

Eine Schwingung wird durch 3 Parameter charakterisiert:

Frequenz: Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit (d.h. Anzahl vollständiger Umdrehungen pro Zeiteinheit).

Amplitude: Höhe der Ausschläge über der Mittellinie (d.h. Radius des Kreises).

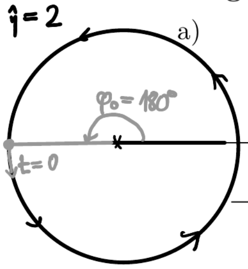
Phase: Verschiebung in der Zeit (d.h. Startposition als Winkel zur Zeit 0).

$T=2$

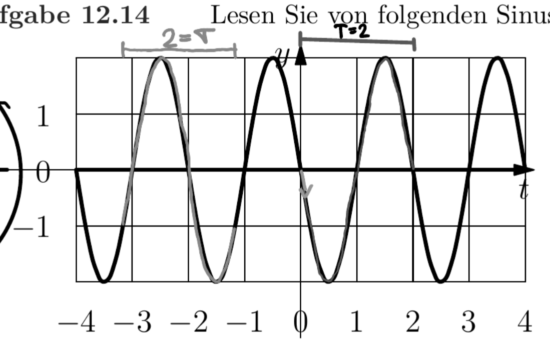
$f=\frac{1}{T}=0.5$

$\hat{y}=2$

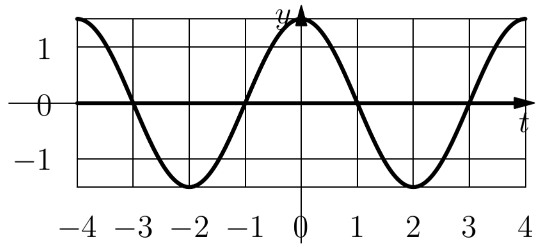
Aufgabe 12.14 Lesen Sie von folgenden Sinus-Schwingungen die Frequenz, Amplitude und Phase ab:



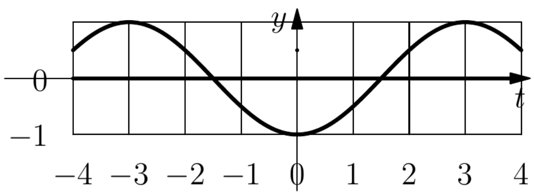
a)



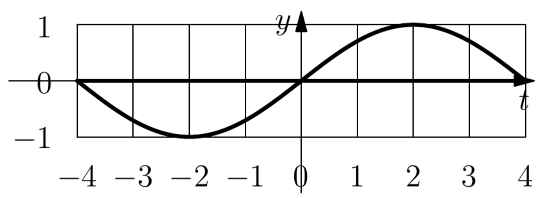
b)



c)



d)

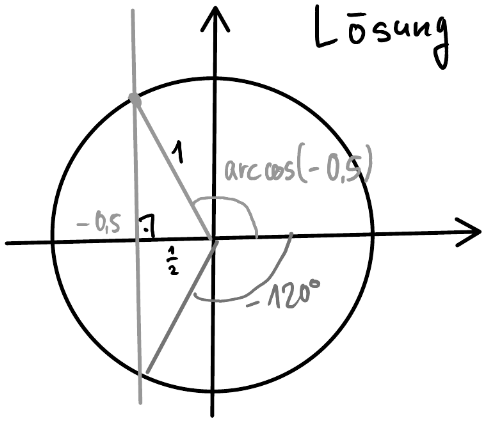


12.15(a) $y(t) = 2\cdot\sin\left(t\cdot\frac{1}{2}\cdot 360° + 180°\right) = 2\cdot\sin\left(t\cdot 180°+180°\right)$

12.11. (k) bestimme $\arccos(-0{,}5)$

gleichbedeutend: Finde den Winkel $\alpha \in [0°, 180°]$ mit $\cos(\alpha) = -0.5$

gleichbedeutend: Löse die Gleichung $\cos(\alpha) = -0.5$ und wähle unter den $\boxed{\text{unendlich vielen Lösungen}}$ die Lösung im Intervall $[0°, 180°]$.



Ein Kathete ist halb so lang wie die Hypotenuse.

Vermutung: 30°–60°–90°–Dreieck.

Alte Aufgabe 12.8: $\cos(120°) = -0.5$

Also $\arccos(-0.5) = 120°$ $(= 180° - 60°)$

Lösungen von $\cos(\alpha) = -0.5$ (solve(cos(α)=−0,5, α))

$\ldots\ldots, \; -240°, \xleftarrow{-360°} 120°, \xrightarrow{360°} 480°, \longrightarrow 840°, \; \ldots\ldots$

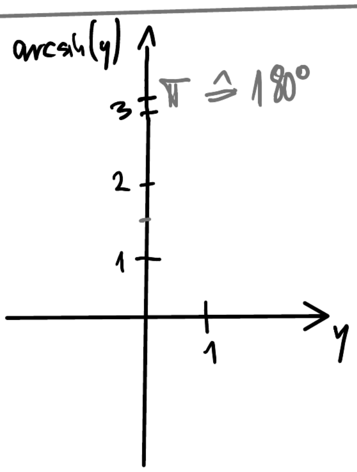
$\ldots\ldots, \; -480°, \longleftarrow -120°, \longrightarrow 240°, \; \ldots\ldots$

Genau eine dieser Lösungen ist im Intervall $[0°, 180°]$ nämlich 120°,

d.h. $\arccos(-0{,}5) = 120°$.

---

zu 12.12



Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Merke Harmonische Schwingung (FMP S. 88)

Eine harmonische Schwingung mit **Frequenz** f, **Amplitude** $\hat{y}$ und **Phase** φ_0 wird durch die Funktion

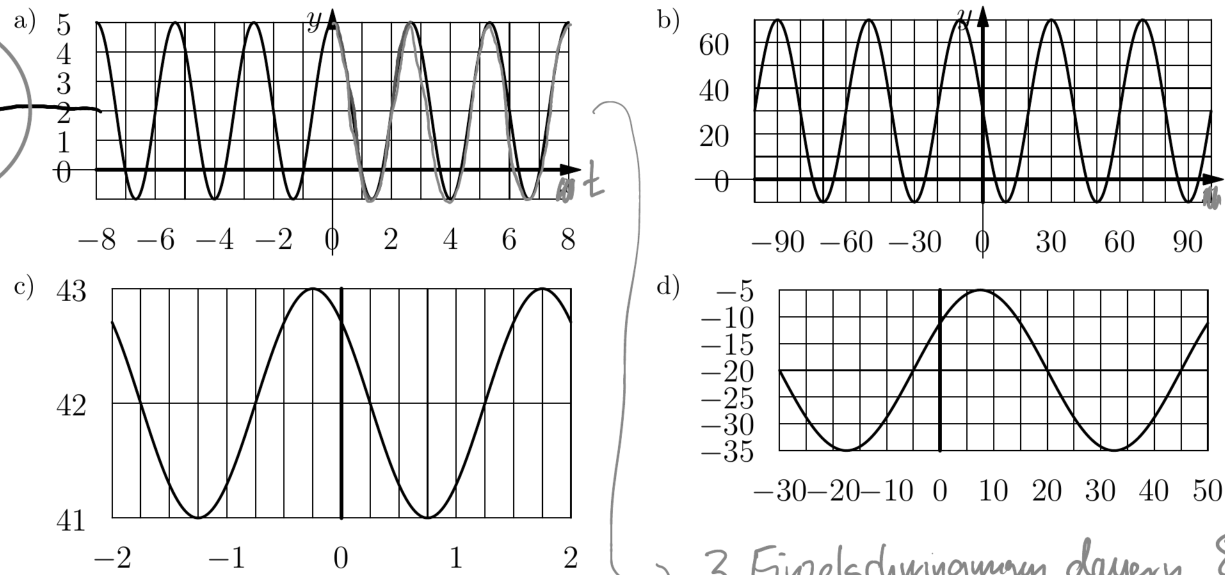
$$y(t) = \hat{y} \cdot \sin(t \cdot f \cdot 360° + \varphi_0) \quad + \text{Offset}$$

beschrieben, wobei t die Zeit darstellt.
Diese Beschreibung umfasst nur Schwingungen um den Nullpunkt. Oft betrachtet man aber Schwingungen, die um einen anderen Wert schwingen (z.B. die Tageslänge im Jahr, Wasserstände bei Gezeiten, etc.). Der Mittelwert (quasi der Nullpunkt) ist dann noch zur Funktionsgleichung zu addieren.

Aufgabe 12.15 Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der Graphen in Aufgabe 12.14.

Aufgabe 12.16 Unten sind die Graphen von harmonischen Schwingungen gegeben. Bestimmen Sie jeweils die zugehörige Funktionsgleichung. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie den Graphen Ihrer Funktionsgleichung mit dem Taschenrechner (oder mit GeoGebra) wie unten beschrieben zeichnen.

Offset = 2



3 Einzelschwingungen dauern 8 s

$\Rightarrow T = \frac{8}{3}, \; f = \frac{3}{8}$

Graphen zeichnen auf dem TR:

- HOME, B (Graph-Modus)
- Überprüfen Sie, dass der Rechner auf Grad (GRAD oder engl. DEG) eingestellt ist. Wenn nicht: Menu, 8 und Grafik-Winkel auf Grad (degrees) festlegen und als Standard speichern.
- Funktionen eingeben: Menu, 3, 1 (dann eventuell mit Pfeiltasten Funktion auswählen), Funktion mit x als Variable eingeben.
- Eventuell den Zoom anpassen mit Menu, 4, A (oder manuell).

Aufgabe 12.17

a) In der Schweiz und Italien wird der Kammerton (a^1, eingestrichenes A) normalerweise auf 442 Hz gestimmt (442 Schwingungen pro Sekunde; Hz ist das Einheitenzeichen für *Hertz*, die Einheit der Frequenz, die als «1 durch Sekunde» definiert ist: $\text{Hz} = \frac{1}{\text{s}}$). Um mit dem Computer einen Ton dieser Frequenz als harmonische Schwingung zu erzeugen, wird die Auslenkung eines Lautsprechers durch Werte (Sampling-Werte oder Abtast-Werte) zwischen $-30'000$ und $30'000$ gesteuert. Diese Werte werden 44100 mal pro Sekunde erzeugt (CD-Sampling Rate). Bestimmen Sie erstens die Funktionsgleichung, um aus der Zeit in Sekunden den Abtastwert zu ermitteln. Bestimmen Sie zweitens die Funktionsgleichung, die aus der Nummer des Abtastwerts den Abtastwert berechnet (Abtastwert 0 entspricht Zeit 0 s, Abtastwert 44100 entspricht 1 s, etc.).

wenn sie in einer Höhe von 0 cm losgelassen wird.

b) Eine Puppe wird an einer Stahlfeder aufgehängt und in Schwingung versetzt, indem sie nach unten gezogen und zum Zeitpunkt $t = 0$ losgelassen wird. Die Puppe pendelt in 2 s auf einer Höhe von insgesamt 20 cm auf und ab. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung, die die Position (Höhe) der Puppe beschreibt. Finden Sie zusätzlich heraus, wie schnell sich die Puppe im obersten und untersten Punkt und im Mittelpunkt dazwischen bewegt (in m/s).

c) St. Gallen befindet sich auf 47.42° nördlicher Breite. Die Äquatorebene ~~Erdachse~~ ist um 23.44° gegenüber der Ekliptik (Umlaufebene der Erde um die Sonne) geneigt. Berechnen Sie den höchsten und tiefsten Sonnenstand, wenn die Sonne im Zenit steht (höchste Position am Tag). In guter Näherung kann angenommen werden, dass der Sonnenhöchststandswinkel über das Jahr durch eine harmonische Schwingung beschrieben werden kann. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung und ermitteln Sie, zu welchen Daten die Sonne einen Höchststand von 60° hat.

d) In guter Näherung kann angenommen werden, dass die Tageslänge (bzw. deren Abweichung vom Mittelwert) über das Jahr mit einer harmonischen Schwingung beschrieben werden kann. Die Tageslänge variiert in St. Gallen zwischen ca. 08 h 25 min am 21. Dezember und 15 h 55 min am 21. Juni. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung, die aus der Nummer des Tages (1. Januar = Tag 1) die Tageslänge berechnet. Berechnen Sie dann damit die Tageslänge an ihrem Geburtstag und vergleichen Sie Ihr Resultat mit anderen Quellen.

12.5 Überlagerung zweier Schwingungen

Bei vielen Phänomenen, die mit harmonischen Schwingungen beschrieben (bzw. angenähert) werden, können diese Schwingungen auch in Überlagerung vorkommen (z.B. zwei Töne gleichzeitig, Wasserwellen, die sich überlagern). Den Spezialfall zweier Schwingungen mit gleicher Frequenz möchten wir hier untersuchen.

Aufgabe 12.18 Arbeiten Sie in 2er- oder 3er-Gruppen zusammen!

a) Untersuchen Sie die Summe $h(x) = f(x) + g(x)$ mit $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \sin(\varphi + x)$, wobei φ je nach Gruppe ein anderes Vielfaches von 45° sein soll.

b) Fassen Sie die beiden Schwingungen als y-Koordinaten von Punkten P_f und P_g auf, die sich auf einem Kreis bewegen. Wie hängen die beiden Kreisbewegungen zusammen?

c) Anstatt nur die Summe der y-Koordinaten zu betrachten, betrachten Sie den Punkt P_h, der als Koordinaten die Summe der Koordinaten von P_g und P_h hat. Was für eine Bewegung führt der Punkt P_h aus?

d) Berechnen Sie aus φ (Phase von g) die Phase von h.

e) Berechnen Sie aus φ (Phase von g) die Amplitude von h.

f) Für welche Winkel φ ist die Amplitude von h gleich gross wie die von f und g?

Aufgabe 12.19

a) Die Stromversorgung in Europa basiert auf Wechselstrom mit einer Frequenz von 50 Hz und einer Amplitude von ca. 310 V (daraus resultiert ein «Gleichstromäquivalent» (auch «Effektivwert» genannt) von 220 V, das normalerweise angegeben wird). Dieser wird in 3 sogenannten Phasen geliefert, deren Namen von der Phasenverschiebung um je 120° herrührt. Normalerweise wird eine Phase und ein Nullleiter (letztlich mit der Erde verbunden) verwendet, um 220 V Geräte zu betreiben. Grössere Geräte wie z.B. Kochherde werden an zwei Phasen angeschlossen. Relevant ist dann die Differenz der Spannungen dieser zwei Phasen. Bestimmen Sie als erstes die Funktion, die die Spannung in der Zeit (in Sekunden) für eine Phase beschreibt.
Wie viel mal grösser ist die Amplitude wenn man zwei Phasen kombiniert (d.h. die Differenz bildet)? Auf welches «Gleichstromäquivalent» kommt man dann?

12.6 Schwebungen

Überlagert (d.h. addiert) man zwei Schwingungen mit fast gleicher Frequenz und Amplitude, entstehen Schwebungen. Im Falle von Tönen nimmt man diese als Lautstärkeschwankungen wahr. Die Frequenz dieser Schwankungen beträgt normalerweise einige Hz. Dieser Effekt tritt auch ein, wenn das Verhältnis der Frequenzen fast eine Bruchzahl mit kleinem Nenner ist, was zum Stimmen von Saiteninstrumenten genutzt wird.

Aufgabe 12.20 Erklären Sie den Effekt der Schwebung mit Hilfe zweier Kreisbewegungen mit annähernd gleicher Geschwindigkeit.

Aufgabe 12.21 Hören Sie sich die Audiodateien auf dem Wiki an (Überlagerungen zweier Sinusschwingungen). Beachten Sie, dass man die Schwebungen auch hört, wenn man Kopfhörer trägt und jedes Ohr nur einen Ton hört! D.h. die Schwebung wird erst im Hirn erzeugt, ohne dass diese physikalisch stattgefunden hat!

Aufgabe 12.22 Zwei Lautsprecher befinden sich an den Punkten $P = (0, 0)$ und $Q = (5, 0)$ (Einheit 1 m). Auf diesen wird der exakt gleiche Sinuston von 440 Hz gespielt. Am Ort (x, y) steht ein Mikrophon, das die Überlagerung der beiden Töne aufzeichnet. Die beiden ankommenden Töne haben eine Phasenverschiebung. Erklären Sie zuerst warum und berechnen Sie diese dann. Auf welcher Figur liegen die Orte, wo (theoretisch) nichts zu hören ist?

12.7 Repetitionsaufgaben

Aufgabe 12.23 Alle berechneten Resultate sind auf 4 signifikante Stellen zu runden.

a) Mit Hilfe einer Handskizze, ohne Taschenrechner, schätzen Sie die Sinus-, Cosinus- und Tangenswerte des Winkels 290°.

b) Mit Hilfe einer Handskizze, ohne Taschenrechner, schätzen Sie $\arccos(-0.2)$, $\arcsin(-0.2)$ und $\arctan(-2)$.

c) Mit Hilfe einer Handskizze und einigen Stichwörtern, zeigen Sie, welche der folgenden Gleichungen richtig und welche falsch sind:

$$\sin(\alpha) = \cos(\alpha + 90°) \qquad \sin(\alpha + 90°) = \cos(\alpha) \qquad \tan(-\alpha) = \tan(\alpha) \qquad \tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$

d) Eine Rampe für Rollstuhlfahrer sollte nicht mehr als 3.5° geneigt sein. Wie lange wird eine solche Rampe, um einen Höhenunterschied von 50 cm zu überwinden?

e) Wie gross ist der Diagonalenschnittwinkel in einem Rechteck, das doppelt so lang wie breit ist?

f) Von einem unbekannten Winkel α wissen wir, dass $\tan(\alpha) = 2$. Welche Werte kommen für $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ in Frage?

g) Von einem Rhombus (gleichseitiges Parallelogramm) kennt man die Seitenlänge $s = 10$ und die Diagonalenlänge $e = 15$. Berechnen Sie die Länge der anderen Diagonalen sowie die Grössen der Innenwinkel.

h) Wie gross ist der Winkel zwischen einer Würfelfläche und einer Körperdiagonalen?

i) Meteosat-9, ein geostationärer Satellit, steht knapp 36'000 km über dem Äquator. Dieser Satellit hat fast die gleiche Länge wie St. Gallen, nämlich 9.4° Ost. Wie hoch (als Winkel angegeben) über dem Horizont steht der Satellit, wenn man weiss, dass St. Gallen auf 47.5° nördlicher Breite liegt und der Erdradius ca. 6370 km beträgt?

Aufgabe 12.24

a) Bestimmen Sie Amplitude, Frequenz und Phase folgender Funktion: $f(x) = 2\sin(45° + x \cdot 180°)$. Skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion.

b) Was passiert mit dem Graphen einer harmonischen Schwingung, wenn man entweder (1) die Phase um 90° erhöht, oder (2) die Amplitude halbiert, oder (3) die Frequenz verdoppelt?

c) Die Sonnenstandshöhe (d.h. der Winkel zwischen Horizont und Sonne) über 24 Stunden kann angenähert durch eine harmonische Schwingung beschrieben werden. Am Sonntag, 11. Juni 2017 geht die Sonne in St. Gallen um 5:26 auf und um 21:17 unter und erreicht einen Höchststand von ca. 65° und einen Tiefststand von ca. −20°. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der harmonischen Schwingung, die den Sonnenstand beschreibt. Berechnen Sie dann, wie hoch die Sonne um 9:55 steht.

d) Die Position eines Uhrenpendels kann in guter Näherung mit einer harmonischen Schwingung beschrieben werden. Wie schnell bewegt sich die Spitze eines 1 m langen Pendels, das mit einer Frequenz von 1 Hz schwingt und einen Ausschlag von 5cm hat?