Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

12 Trigonometrie

Fast alle Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen (Cosinus, Sinus und Tangens) können aus der **Bewegung eines Punktes** auf dem **Einheitskreis** (mit Geschwindigkeit 1) hergeleitet werden.

Definition 12.1 Einheitskreis

Der **Einheitskreis** ist der Kreis im 2-dimensionalen Koordinatensystem mit Zentrum $(0, 0)$ und Radius 1.

Definition 12.2 Winkel und Drehsinn

Winkel im Einheitskreis werden von der positiven x-Achse in Richtung der positiven y-Achse gemessen. D.h. der **positive Drehsinn** im gebräuchlichen Koordinatensystem entspricht dem **Gegenuhrzeigersinn**.

Definition 12.3 P_α

Für einen beliebigen Winkel α ist P_α derjenige Punkt auf dem Einheitskreis mit $\sphericalangle XOP_\alpha = \alpha$ (links steht der orientierte Winkel), wobei $X = (1, 0)$ und $O = (0, 0)$.

Definition 12.4 Cosinus und Sinus

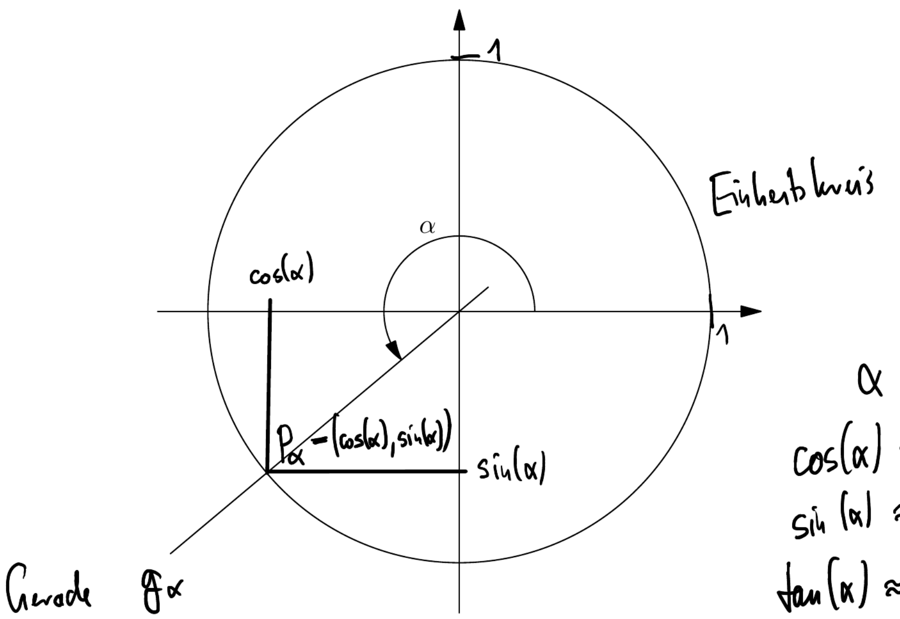
Für jeden Winkel α ist $\cos(\alpha)$ die x-Koordinate von P_α und $\sin(\alpha)$ ist die y-Koordinate von P_α. Kurz:

$$P_\alpha = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$$

Definition 12.5 Tangens und g_α

Die Funktion $\tan(\alpha)$ liefert für jeden Winkel α die **Steigung** der Geraden $g_\alpha = OP_\alpha$.

Aufgabe 12.1 Beschriften Sie die folgende Skizze so, dass die obigen Definitionen möglichst gut illustriert werden!

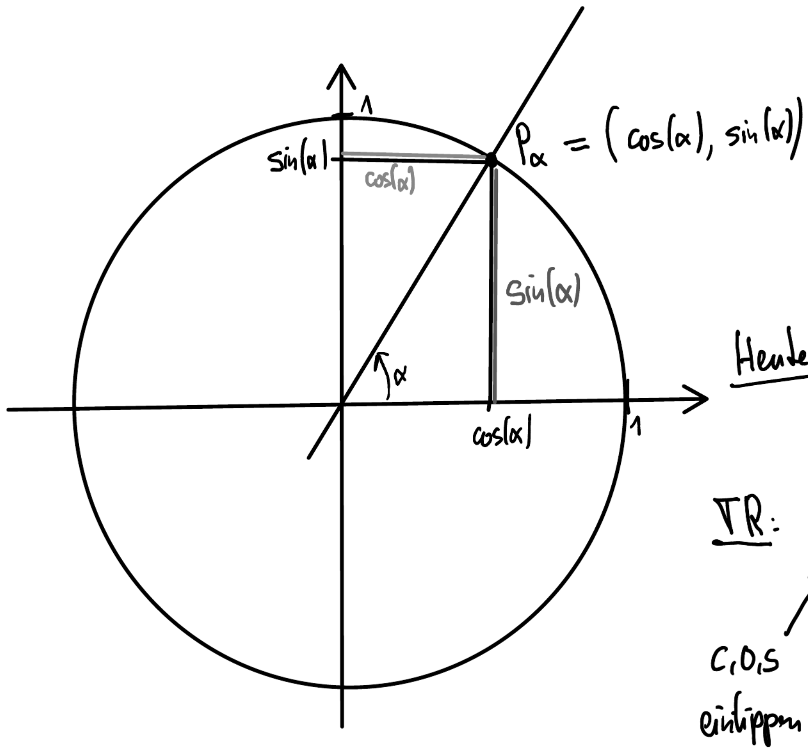


$\alpha \approx 220$

$\cos(\alpha) \approx -0.8$

$\sin(\alpha) \approx -0.7$

$\tan(\alpha) \approx \frac{-0.7}{-0.8} = \frac{7}{8} = 0.875$



Heute: Aufgabe 12.2

TR: cos(55)

c,o,s eintippen → cos(55)

$\boxed{\text{trig}}$ → cos(55)

$\boxed{\text{enter}}$

sin(35)

$\boxed{\approx}$ ⇝ Kommazahl

$\cos(55) \neq 2.3$

Mittwoch: sin(alpha)=0.8 erklären (graphisch und TR-Lösung)

(Geogebra?)

Wer mit Tablet arbeitet: Winkel genau oder Geogebra

Aufgabe 12.2 Zeichnen Sie einen Einheitskreis mit 8 cm Durchmesser. Schalten Sie Ihren Taschenrechner ins Gradmass um. Drücken Sie Home, 5, 2 und stellen dann die Option «Winkel» auf Grad um. Speichern Sie die Einstellungen als Standard.

a) Zeichnen Sie die Punkte $P_{55°}$, $P_{290°}$, $P_{-190°}$ und $P_{380°}$ ein. Bestimmen Sie dann durch Messen die Cosinus- und Sinuswerte dieser Winkel. *Achtung: Es muss in Einheiten, nicht in cm gemessen werden!*

b) Berechnen Sie mit dem Taschenrechner die Cosinus- und Sinuswerte der Winkel aus Teilaufgabe a). *Achtung: Der Taschenrechner muss im Gradmass (DEG) rechnen, und nicht im Bogenmass (RAD).*

c) Bestimmen Sie, ebenfalls durch Messen, die Tangenswerte der Winkel aus Teilaufgabe a) und überprüfen Sie Ihre Messungen mit dem Taschenrechner.

d) Für welche Winkel α (es gibt unendlich viele!) gilt $\sin(\alpha) = 0.8$? Bestimmen Sie die Antwort durch Konstruieren und Abmessen. Beschreiben Sie alle Lösungen (unendlich viele). Lösen Sie die Gleichung mit dem TR und interpretieren Sie das Resultat.

e) Für welche Winkel α gilt $\cos(\alpha) = -0.2$? Bestimmen Sie die Antwort durch Konstruieren und Abmessen. Beschreiben Sie alle Lösungen (unendlich viele). Lösen Sie die Gleichung mit dem TR und interpretieren Sie das Resultat.

f) Für welche Winkel α (es gibt unendlich viele!) gilt $\tan(\alpha) = -2$? Bestimmen Sie die Antwort durch Konstruieren und Abmessen. Beschreiben Sie alle Lösungen (unendlich viele). Lösen Sie die Gleichung mit dem TR und interpretieren Sie das Resultat.

g) Für welche Winkel α gilt $\sin(\alpha) = 4.2$?

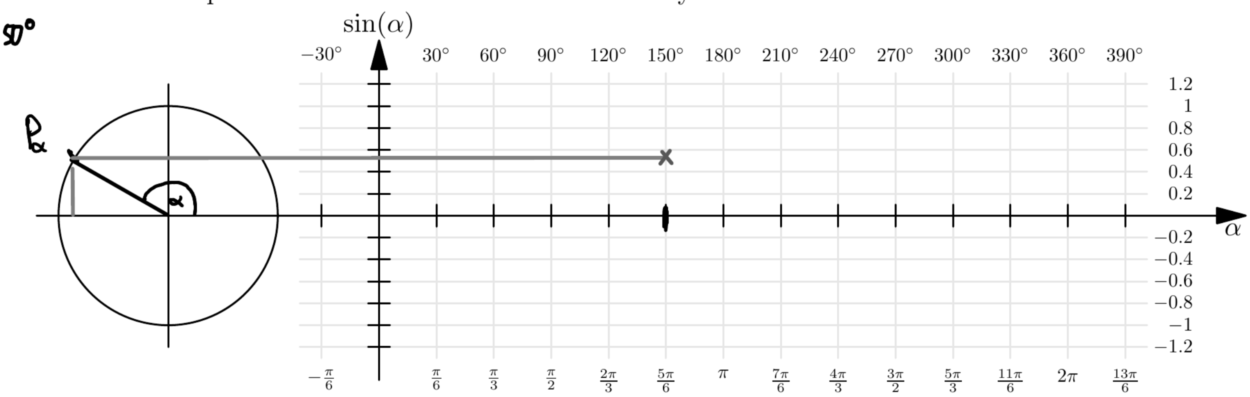
h) Für welche Winkel α gilt $\cos(\alpha) = -2$?

Aufgabe 12.3 Ziel dieser Aufgabe ist, die Graphen der Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion in die vorgegebenen Koordinatensysteme einzuzeichnen.

Für jedes α ist der Punkt $\boxed{(\alpha, \sin(\alpha))}$ einzutragen

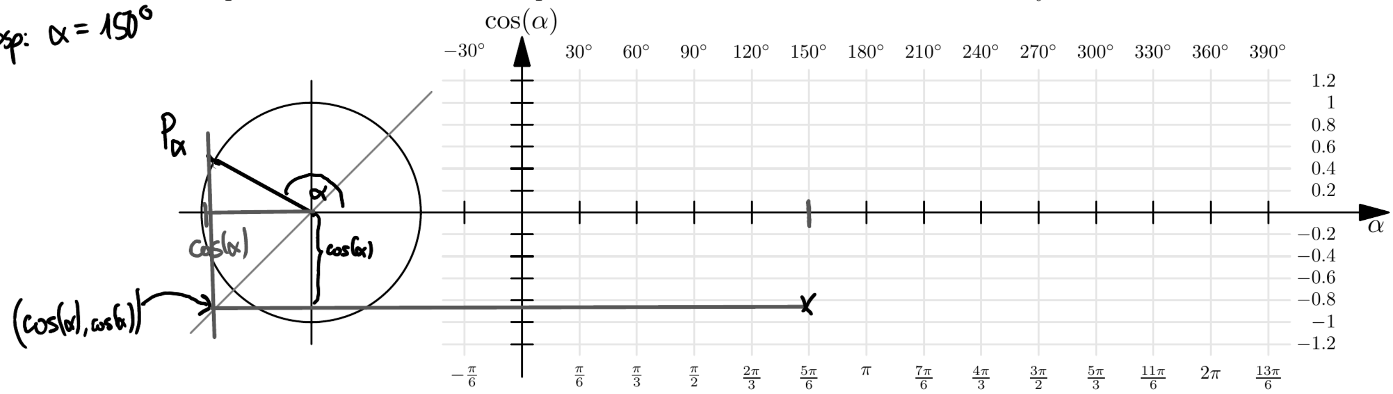
a) Graph der Sinusfunktion: Markieren Sie für alle Winkel α zwischen $-30°$ und $390°$, die Vielfache von $15°$ sind, den Punkt P_α im Kreis links und nutzen Sie jeweils eine horizontale Linie, um den entsprechenden Punkt des Graphen der Sinusfunktion im Koordinatensystem rechts einzuzeichnen.

Bsp α = 150°



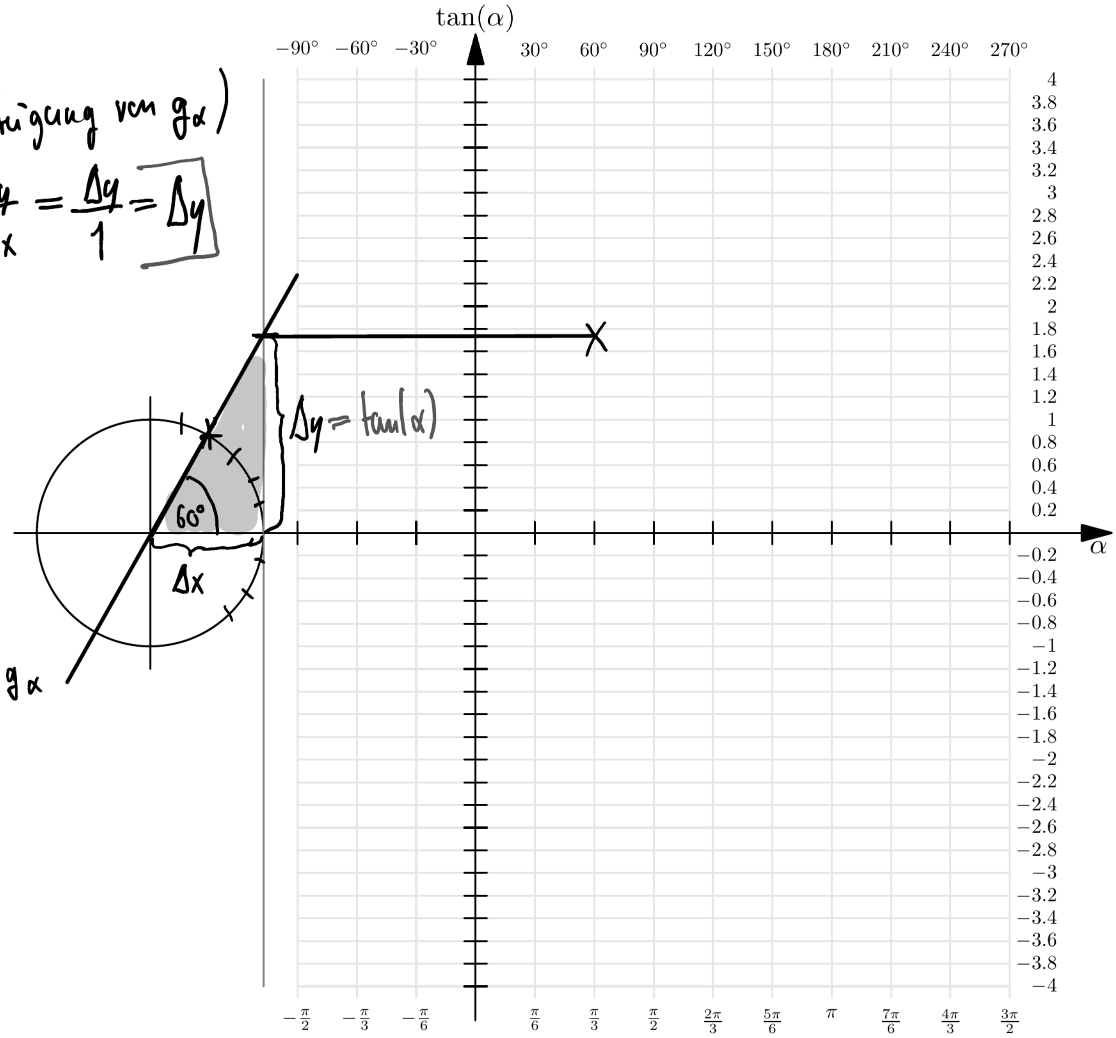
b) Graph der Kosinusfunktion: Markieren Sie für alle Winkel α zwischen $-30°$ und $390°$, die Vielfache von $15°$ sind, den Punkt P_α im Kreis links und nutzen Sie die hellgraue erste Winkelhalbierende, um den entsprechenden Punkt des Graphen der Kosinusfunktion im Koordinatensystem rechts einzuzeichnen.

Bsp: α = 150°



c) Skizzieren Sie den Graphen der Tangensfunktion! Vorgehen: Markieren Sie für alle Winkel α zwischen $-90°$ und $270°$, die Vielfache von $15°$ sind, den Punkt P_α im Kreis. Begründen Sie genau, was die Steigung der Gerade g_α mit der Tangente $x = 1$ an den Einheitskreis zu tun hat.

$$\boxed{\tan(\alpha)} = (\text{Steigung von } g_\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{1} = \boxed{\Delta y}$$



Aufgabe 12.4 Bestimmen Sie mit einem Tabellenkalkulationsprogramm oder direkt mit Python die Koordinaten eines regelmässigen 5-Ecks und stellen Sie es graphisch dar!

Aufgabe 12.5 Für die Herleitung folgender trigonometrischer Identitäten ist eine gute Skizze nötig. Zeigen Sie, dass für beliebige Winkel α gilt:

a) $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$,

b) $\big(\sin(\alpha)\big)^2 + \big(\cos(\alpha)\big)^2 = 1$,

c) $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$,

d) $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.

Aufgabe 12.6 Bestimmen Sie die **exakten** Cosinus-, Sinus- und Tangenswerte der Winkel $30°$ und $45°$. Machen Sie dazu eine Skizze im Einheitskreis und suchen Sie spezielle rechtwinklige Dreiecke.

Erstellen Sie dann eine Tabelle mit allen trigonometrischen Funktionswerten aller Vielfachen von $30°$ und $45°$ zwischen $0°$ und $360°$.

12.1 Bogenmass

Es stellt sich heraus, dass es mathematisch am «zweckmässigsten» ist, einen Winkel durch die Länge des entsprechenden Bogens auf dem Einheitskreis anzugeben.

Gradmass Bogenmass

$$\text{Vollwinkel} = \boxed{360° \mathrel{\hat{=}} 2\pi \ \text{rad}}$$

$$90° \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{2}\pi \ \text{rad}$$

$$\boxed{60° \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{3}\pi \ \text{rad}}$$

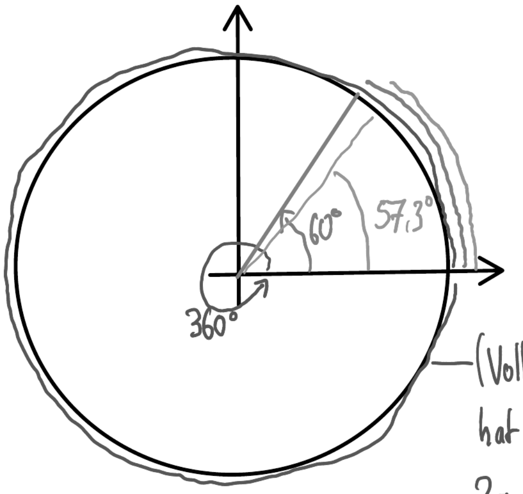
$$120° \mathrel{\hat{=}} \frac{2}{3}\pi \ \text{rad}$$

$$30° \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{6}\pi \ \text{rad}$$

$$1° \mathrel{\hat{=}} \frac{2\pi}{360} \ \text{rad} = \frac{\pi}{180} \ \text{rad}$$

$$\boxed{57{,}30 \approx \frac{180°}{\pi} \mathrel{\hat{=}} 1 \ \text{rad}}$$

$$180° \mathrel{\hat{=}} \pi \ \text{rad}$$



(Voll-)Kreisbogen hat Länge $2\pi \cdot 1 = 2\pi$

Umrechnungsformeln:

$$\boxed{360° \mathrel{\hat{=}} 2\pi}$$

$$1° \mathrel{\hat{=}} \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$$

$$17° \mathrel{\hat{=}} 17 \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$g° \mathrel{\hat{=}} g \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$\boxed{r(g) = \underbrace{g \cdot \frac{\pi}{180}}_{\text{Winkel in Radiant}}}$$

g: Winkel in Grad

$$2\pi \mathrel{\hat{=}} 360°$$

$$1 \mathrel{\hat{=}} \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi}$$

$$r \mathrel{\hat{=}} r \cdot \frac{180°}{\pi}$$

$$\boxed{g(r) = \underbrace{r \cdot \frac{180°}{\pi}}_{\text{Winkel in Grad}}}$$

r: Winkel in Radiant

Definition 12.6 Bogenmass

Ein Winkel α im Bogenmass ist die Länge des entsprechenden Bogens auf dem Einheitskreis von $(1,0)$ bis P_α (in positivem Drehsinn), gemessen in Vielfachen der Einheitslänge.

Ein Winkel im Bogenmass ist also eine Zahl (ohne Masseinheit).

Gelegentlich schreibt man die Einheit **rad** (gelesen «Radiant») dazu, um eine solche Zahl als Winkel im Bogenmass zu kennzeichnen.

Der Name *Radiant* kommt daher, dass die Länge des Kreisbogens in Vielfachen des *Radius* angegeben wird.

Aufgabe 12.7 Vervollständigen Sie folgende Tabelle mit exakten Werten und bestimmen Sie die beiden Umrechnungsfunktionen $g(r)$ von Radiant in Grad und $r(g)$ von Grad in Radiant!

Grad	$0°$	$360°$	$180°$	$90°$	$-90°$	$45°$	$120°$	$225° = 180° + 45°$	$g(r) =$
Radiant	0	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5}{4}\pi$	$r(g) =$

12.2 Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

Der Begriff «Trigonometrie» kommt aus dem Griechischen und bedeutet Dreiecksvermessung (τριγωνον *trígonon* «Dreieck» und μετρον *métron* «Mass»). [1]

Aufgabe 12.8 In dieser Aufgabe sind zwei Skizzen nebeneinander zu erstellen, ein Dreieck und ein Einheitskreis.

- Zeichnen Sie ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle GHA$ mit Winkel $\gamma \approx 25°$ bei G und rechtem Winkel bei H. Beschriften Sie den Winkel γ und die Seiten g, h, und a.
- Zeichnen Sie daneben einen Einheitskreis mit dem Punkt P_γ (gleicher Winkel γ wie in Ihrem Dreieck).
- Zeichnen Sie das Stützdreieck unter der Strecke OP_γ.
- Begründen Sie, warum das Stützdreieck und Ihr Dreieck $\triangle GHA$ ähnlich sind. Beide haben rechten Winkel und Winkel gamma.
- Beschriften Sie die Längen der Stützdreiecksseiten.
- Geben Sie mit Hilfe des Stützdreiecks die drei Seitenverhältnisse $g:h$, $a:h$ und $g:a$ an.

Also:

Merke Sinus und Cosinus im rechtwinkligen Dreieck

Sei δ ein Winkel ($\neq 90°$) in einem rechtwinkligen Dreieck. Die diesem Winkel *an*liegende Kathete heisst **Ankathete**, die dem Winkel *gegen*überliegende Kathete heisst **Gegenkathete**. Es gilt:

$$\sin(\delta) = \frac{\text{Gegenkathete zu } \delta}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos(\delta) = \frac{\text{Ankathete zu } \delta}{\text{Hypotenuse}} \qquad \tan(\delta) = \frac{\text{Gegenkathete zu } \delta}{\text{Ankathete zu } \delta}$$

Dazu gibt es folgende Eselsbrücke[2]: **«GAGA HühnerHof AG»**, der in folgender Tabelle zusammengefasst wird:

sin	cos	tan	(cot)
G	A	G	A
H	H	A	G

Zum Beispiel ist der Cosinus der Quotient **A**nkathete durch **H**ypotenuse. Hinweis: cot steht für Cotangens und ist für fast alle Winkel einfach der Kehrwert des Tangens.

$$\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Trigonometrie
[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Merkspruch

Freitag: Erkläre:
(1) Bogenmass in (animierten) Grafiken verwendet, lasse python-Programm laufen am Anfang der Stunde mit dicken Graphen.
(2) TR muss auf DEG gestellt sein (wenn RAD, müssen Winkel im Bogenmass/in Radiant eingegeben werden).

Aufwärmaufgaben (für Freitag?):
(1) cos(alpha) = 1/3. Welche Werte kann sin(alpha) haben? Welche Werte kann tan(alpha) haben?
(2) tan(alpha) = 2. Welche Werte können sin, cos, haben.
(a) näherungsweise mit TR (berechne mögliche alpha, dann sin, cos).
(b) genau per Gleichungssystem, Einsetzverfahren.

Aufgabe 12.9 Von einem rechtwinkligen Dreieck sind in den folgenden Teilaufgaben jeweils ein Winkel und eine Seite bekannt. Berechnen Sie die fehlenden Seiten mit dem TR. Geben Sie die Resultate auf 4 signifikante Stellen gerundet an (d.h. egal, wo das Komma ist, es stehen vier Stellen da (führende Nullen nicht mitgezählt)). Überprüfen Sie Ihre Resultate mit einer kleinen Handskizze auf ihre Plausibilität.

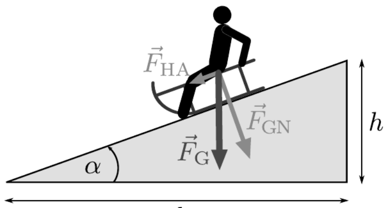
a) $\alpha = 20°$, $a = 4$ b) $\beta = 50°$, $c = 3$ c) $\alpha = 35°$, $b = 5$ d) $\beta = 55°$, $a = 2$

Aufgabe 12.10

a) Aktuelle Gleitschirme haben einen Gleitwinkel von etwa 7° (Winkel zwischen Flugrichtung und der Horizontalen). Normalerweise wird aber die Gleitzahl angegeben, das ist die horizontale Distanz in m, die pro Höhenmeter zurückgelegt wird. Berechnen Sie die Gleitzahl. Welcher trigonometrischen Funktion des Gleitwinkels entspricht die Gleitzahl?

b) Sie stehen in der Wüste von Dubai und der 830 m hohe Burj Khalifa erscheint unter einem Winkel von 20°. Wie weit vom Turm sind Sie entfernt?

c) In der Skizze rechts ist $\vec{F}_G$ die Gewichtskraft, die auf die Person inklusive Schlitten wirkt. Mit den beiden anderen Kräften $\vec{F}_{GN}$ (Komponente der Gewichtskraft senkrecht (normal) zum Boden) und $\vec{F}_{HA}$ (Hangabtriebskraft, beschleunigt Schlitten samt Person parallel zum Hang) kann ein rechtwinkliges Dreieck gebildet werden.
Für eine Hangneigung von $\alpha = 10°$: Mit viel Prozent der Gewichtskraft wird die Person mit Schlitten den Hang hinunter gezogen?



Grafik: Creative Commons Lizenz Version 3.0, by-nc-sa, Copyright by Bernhard Grotz
http://www.grund-wissen.de/physik/mechanik/kraftwandler-und-getriebe/schiefe-ebene.html

12.3 Arcus-Funktionen

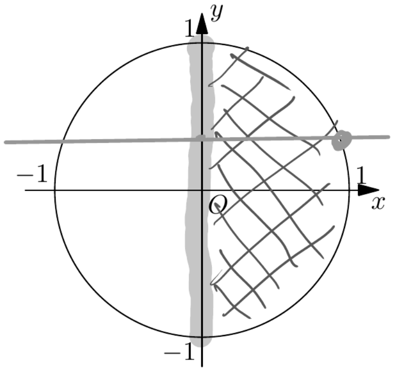
Die trigonometrischen Funktionen ordnen Winkeln Zahlen zu. Nun wollen wir umgekehrt wissen, welcher Winkel zu einer gegebenen Zahl gehört.

Die trigonometrischen Funktionen besitzen sogenannte **Umkehrfunktionen**, die z.B. aus Sinuswerten wieder Winkel berechnen. Der Name *Arcus-Funktionen* leitet sich davon ab, dass diese Funktionen (in Radiant gemessen) *Bogen*längen liefern (lat. *arcus* für *Bogen*).

Das Problem ist, dass jeder Sinuswert von unendlich vielen Winkeln produziert wird, die normalerweise genau zwei Punkten auf dem Einheitskreis entsprechen (= den Schnittpunkten einer Horizontalen mit dem Einheitskreis).

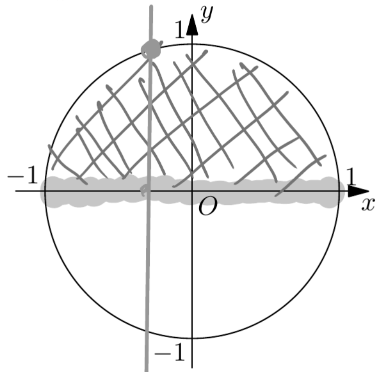
Da eine Funktion für jedes Argument nur genau einen Wert liefert, stellt sich Frage: Welchen dieser Punkte wählt man für die Berechnung der Umkehrfunktion und wie wählt man den Winkel?

Arcus-Sinus
$y \in [-1, 1]$
Mathe: $\arcsin(y) = \sin^{-1}(y)$
Computer: `asin(y)`



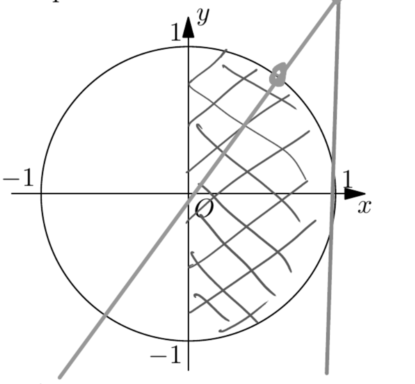
Liefert Winkel im Intervall:
$[-90°, +90°]$

Arcus-Cosinus
$x \in [-1, 1]$
Mathe: $\arccos(x) = \cos^{-1}(x)$
Computer: `acos(x)`



Liefert Winkel im Intervall:
$[0°, 180°]$

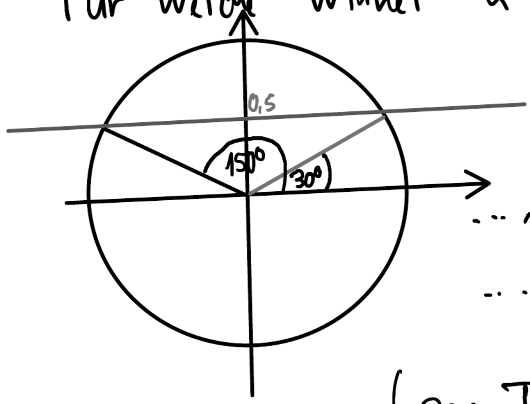
Arcus-Tangens
$m \in \mathbb{R}$
Mathe: $\arctan(m) = \tan^{-1}(m)$
Computer: `atan(m)`



Liefert Winkel im Intervall:
$[-90°, 90°]$

Hinweis: Sind Winkel gesucht, die stumpf sein können, empfiehlt es sich, falls möglich, arccos anstatt arcsin zu benutzen. So muss der Winkel am Schluss nicht noch umgerechnet werden.

Für welche Winkel α gilt $\sin(\alpha) = \underline{0.5}$?



Antwort:

$\ldots, -690°, \; -330°, \; \boxed{30°}, \; 390°, \; 750°, \; 1110°, \ldots$ (jeweils $-360°$ / $+360°$)

$\ldots\ldots, -210°, \; 150°, \; 510°, \; 870°, \ldots\ldots$ (jeweils $+360°$)

(per TR: solve $(\sin(x) = 0.5, x)$)

Unter all diesen unendlich vielen Winkeln gibt es genau einen, der im Intervall $[-90°, 90°]$ liegt, nämlich $\alpha = 30°$.

Diesen nennt man $\arcsin(0.5)$, d.h. $\arcsin(0{,}5) = 30°$.

Statt 0.5 hätten wir irgendeinen Wert im Intervall $[-1, 1]$ wählen können.

Definition der Funktion arcsin:

Für jedes $y \in [-1, 1]$: ist arcsin(y) der eindeutig bestimmte Winkel

α mit $\sin(\alpha) = y$

und $\alpha \in [-90°, 90°]$.

Lektion vor Prüfung im Dezember, Stoff war bis Arcus-Funktionen uneinschliesslich.

12.23 (f)

Von einem unbekannten Winkel alpha wissen wir, dass tan(alpha) = 2 gilt.
Welche Werte kommen für sin(alpha) und cos(alpha) in Frage?

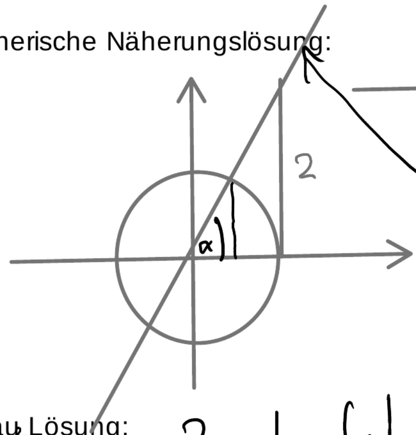
- näherungsweise Lösungen, sowohl zeichnerisch als auch rechnerisch
- genaue Lösung

Rechnerische Näherungslösung:

solve (tan(α) = 2, α) $\xrightarrow{TR}$ α ≈ 63° oder 243° +180

plus/minus Vielfache von 360 Grad

$\leadsto$ sin(63°) ≈ ...



Ursprungsgerade mit Steigung 2 (= tan(α))

sin(alpha) und cos(alpha) ablesen.

Genau Lösung:

$$2 = \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \Rightarrow \boxed{\sin(\alpha) = 2\cdot\cos(\alpha)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\alpha)}{2} = \cos(\alpha)$$

$$\boxed{1 = (\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2}$$

einsetzen

$$1 = (2\cos(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 4(\cos(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 5(\cos(\alpha))^2 \quad |:$$

$$\frac{1}{5} = (\cos(\alpha))^2 \quad | \text{ „Wurzel ziehen“}$$

$$\pm 0.4472 \approx \pm\frac{1}{\sqrt{5}} = \cos(\alpha)$$

Falls $\cos(\alpha) = +\frac{1}{\sqrt{5}}$, so $\sin(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0.8944$

Falls $\cos(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, so $\sin(\alpha) = -\frac{2}{\sqrt{5}} \approx -0.8944$

$$\sin(\alpha)^2 + 5\cos(\alpha)^4 = 1$$

$$1 - \cos^2 + 5\cos^4 = 1$$

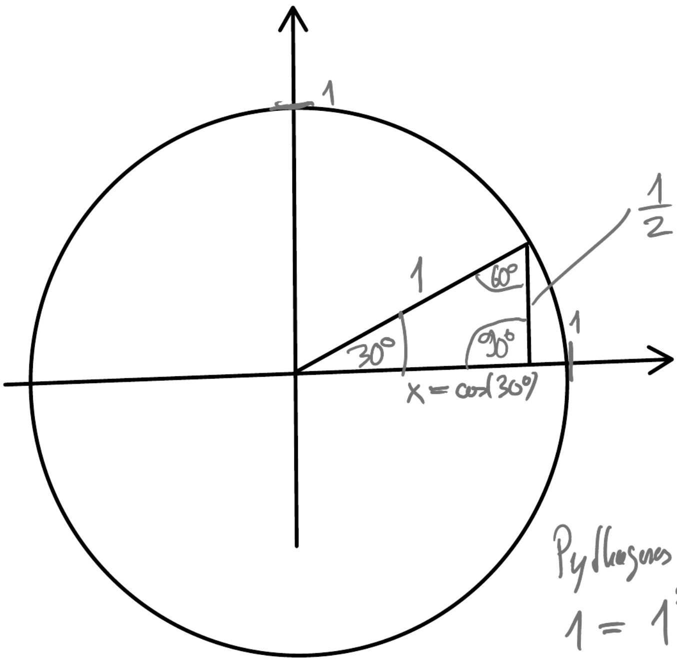
$$1 - x^2 + 5x^4 = 1$$

$$1 = \sin^2 + \cos^2$$

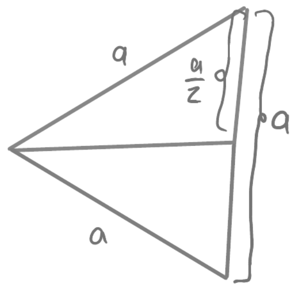
$$1 - \cos^2 = \sin^2$$

$$\pm\sqrt{1-\cos^2} = \sin$$

12.6



$\frac{1}{2} \overset{\sin(30°)}{/\!/}$, da 30°-60°-90°-Dreieck

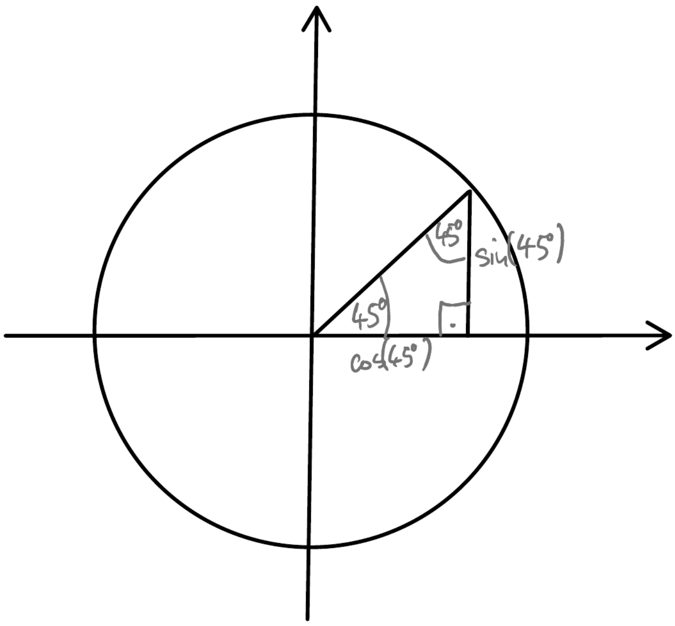


Pythagoras

$$1 = 1^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{3}{4} = x^2$$

$$(\pm)\ \frac{\sqrt{3}}{2} = x = \cos(30°)$$



Δ gleichschenklig (+ rechtwinklig)

$$\cos(45°) = \sin(45°) = x$$

Pythagoras $1^2 = x^2 + x^2$

$$1 = 2x^2$$

$$\frac{1}{2} = x^2$$

$$(\pm)\ \frac{1}{\sqrt{2}} = x$$

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Bestimme ohne TR und ohne Abmessen, aber mit geometrischen Überlegungen und

Aufgabe 12.11 ~~Berechnen Sie ohne TR~~ mit Hilfe einer Skizze des Einheitskreises:

a) $\arcsin(0)$	b) $\arccos(0)$	c) $\arctan(0)$	d) $\arcsin(1)$
e) $\arccos(1)$	f) $\arctan(1)$	g) $\arcsin(-1)$	h) $\arccos(-1)$
i) $\arctan(-1)$	j) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\boxed{\text{k) } \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)}$	l) $\arctan\left(\sqrt{3}\right)$

Aufgabe 12.12 Zeichnen Sie (auf Papier) die Funktionsgraphen der Arcusfunktionen $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$ und $\arctan(x)$. Wählen Sie jeweils sinnvolle Skalierungen für die Achsen.

Aufgabe 12.13

a) Moderne Segelflieger haben eine Gleitzahl (siehe Aufgabe 12.10 a)) von ca. 50. Berechnen Sie den entsprechenden Gleitwinkel. *Zusatzaufgabe: Wenn so ein Segelflieger das Matterhorn knapp überfliegt, könnte dieser ohne weitere Auf- und Abwinde im Aargau in Birrfeld landen?*

b) Ein 8 m hoher senkrechter Strommast wirft einen 4 m langen Schatten. Wie gross ist der Einfallswinkel der Sonnenstrahlen? *Zusatzaufgabe: Zu welcher Jahres- und Tageszeit steht die Sonne in St. Gallen so hoch?*

c) Am Anfang einer Passstrasse steht ein Schild mit der Aufschrift «20% Steigung». Was ist also der Winkel dieser Strasse gegenüber der Horizontalen (wenn man annimmt, dass die Steigung überall genau 20 % beträgt)?

d) Eine Downhill-Mountainbikerin zeichnet ihre Talfahrt vom Maschgenkamm nach Quarten am Walensee sowohl mit ihrem Tachometer als auch mit ihrem GPS auf. Nach 8.271 km auf dem Tachometer zeigt das GPS nur 8.115 km an. Sie setzt beide Geräte wieder auf Null und radelt nach Sargans. Dort zeigen beide Geräte bis auf 2 m die gleiche Distanz (19.2 km) an.
Was hat das GPS gemessen und wie steil (Angabe als Winkel und in %) war die Abfahrt im Durchschnitt?

12.4 Harmonische Schwingungen

Die Bewegung eines Massestücks, das an einer metallischen Springfeder aufgehängt schwingt, kann in guter Näherung als *harmonische Schwingung* beschrieben werden.

Eine harmonische Schwingung kann durch eine gestreckte und verschobene Sinusfunktion beschrieben werden. Am einfachsten stellt man sich dabei einen Punkt vor, der eine gleichförmige Kreisbewegung ausführt (d.h. seine (Dreh-)Geschwindigkeit ist konstant). Dann beschreibt die y-Koordinate des Punktes eine harmonische Schwingung.

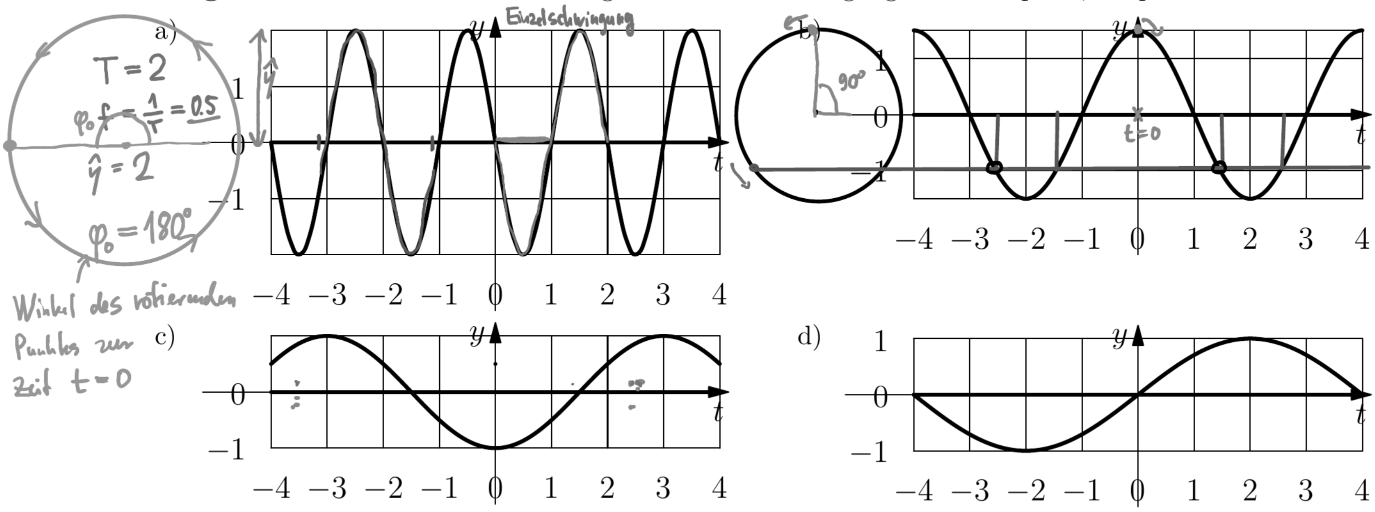
Eine Schwingung wird durch 3 Parameter charakterisiert:

Frequenz: Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit (d.h. Anzahl vollständiger Umdrehungen pro Zeiteinheit).

Amplitude: Höhe der Ausschläge über der Mittellinie (d.h. Radius des Kreises).

Phase: Verschiebung in der Zeit (d.h. Startposition als Winkel zur Zeit 0). Phase $\varphi_0 = 90°$

Aufgabe 12.14 Lesen Sie von folgenden Sinus-Schwingungen die Frequenz, Amplitude und Phase ab:

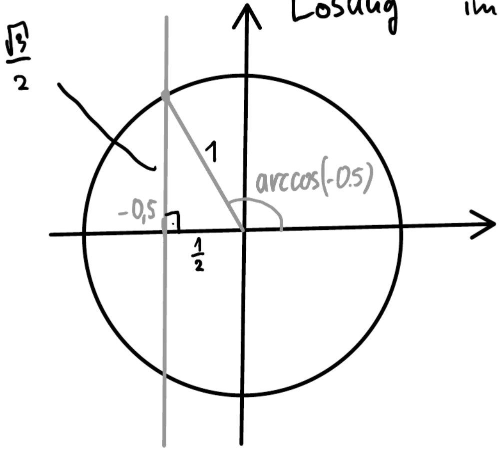


12.15(a) y(t)= 2 sin(t mal 0.5 mal 360 Grad + 180 Grad) =2 sin(t mal 180+180)

12.11. (k) Bestimme $\arccos(-0.5)$!

gleichbedeutend: Finde den Winkel $\alpha \in [0°, 180°]$ mit $\cos(\alpha) = -0.5$

gleichbedeutend: Löse die Gleichung $\cos(\alpha) = -0.5$ und nimm die Lösung im Intervall $[0°, 180°]$.



Hypotenuse ist doppelt so lang wie die Kathete.

Vermutung: 30°-60°-90°-Dreieck

Aufgabe 12.8: $\cos(120°) = -0.5$

Also: $\arccos(-0.5) = 120° \; (= 180° - 60°)$

j + l: berechne die dritte Seite im offensichtlichen Dreieck.