I. Blöchliger, S. Knaus, O. Schnürer

18 Differentialrechnung

Die *Differentialrechnung* als Teil der sogenannten *Analysis* beschäftigt sich mit der Berechnung lokaler Änderungsraten von Funktionen. Konkret geht es um die Frage:

> «Wenn sich das Argument einer Funktion leicht ändert, wie viel mal grösser ist die Änderung des Funktionswerts (im Vergleich zur Änderung des Arguments)?»

Oder salopp ausgedrückt:

> «Wenn x wackelt, wie viel mal mehr wackelt $f(x)$?»

Diese Änderungsrate ist selbst eine Funktion, die sogenannte **Ableitung** der Funktion. Für jeden x-Wert gibt die Ableitung an, wie stark sich die Funktion an dieser Stelle ändert.

Wichtige Anwendungen sind z.B. die Bestimmung von lokalen Minima und Maxima einer Funktion (Optimierung), die Beschreibung physikalischer und technischer Abläufe und Computergrafik (z.B. Bézier-Kurven oder die Beschreibung von gekrümmten Flächen mit sogenannten Nurbs).

Hinweise zu den «Beweisen»

Wir werden viele Dinge «beweisen». Diese «Beweise» genügen aber meistens nicht den Anforderungen an Präzision, die in der Mathematik üblich sind. Stattdessen werden «Beweise» gezeigt, die in den meisten Fällen auch eine Intuition für die Sachverhalte vermitteln.

18.1 Erinnerung: Steigung einer Geraden

Die Steigung einer Geraden in der x-y-Ebene gibt an, um wie viel sich der y-Wert **pro** (also Division) x-Einheit verändert. Sie ist definiert als der Quotient der (vorzeichenbehafteten!) Differenz Δy («Delta y» zweier y-Werte) geteilt durch die Differenz Δx der entsprechenden x-Werte:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Aufgabe 18.1 Lassen Sie einen Stift auf dem Tisch rotieren. Wenn er zum Stillstand kommt, schätzen Sie möglichst schnell die Steigung der durch den Stift definierten Geraden ab. Legen Sie dazu zuerst sinnvolle Achsenrichtungen fest.

18.2 Lokale (oder momentane) Änderungsrate

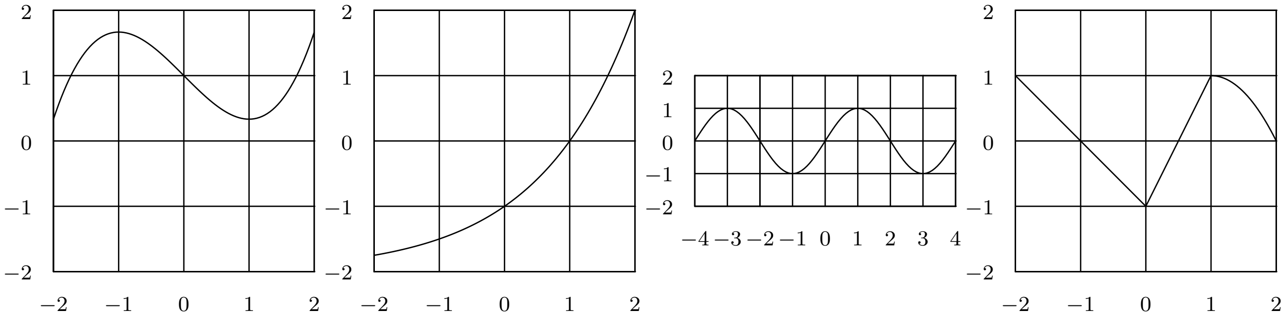
Eine **Änderungsrate** gibt an, wie sich eine zeitabhängige Grösse während einer gewissen Zeitdauer ändert. Zum Beispiel ist die Änderungsrate der von einem Fahrzeug zurückgelegten Strecke die Geschwindigkeit; wenn man hier «unendliche kleine»/«infinitesimale» Zeitdauern betrachtet, spricht man von der momentanen oder lokalen Änderungsrate. Damit nähert sich die Durchschnittsgeschwindigkeit auf immer kleineren Zeitintervallen der Momentangeschwindigkeit.

Statt für die Änderungsrate der Strecke s in Abhängigkeit von der Zeit t interessieren wir uns nun allgemeiner für die Änderungsrate einer Funktion f in Abhängigkeit vom Argument x. Auch diese kann angenähert werden, indem man f an zwei immer näher beieinander liegenden Stellen betrachtet und davon die Steigung der Sekante berechnet.

Merke 18.1 Ableitung einer Funktion

Die **Ableitung $f'(x)$ einer Funktion f an einer Stelle** x ist die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x, f(x))$. Mit anderen Worten ist die Ableitung die lokale Änderungsrate von f an der Stelle x.
Die Zuordnung $x \mapsto f'(x)$ ist wiederum eine Funktion. Sie heisst die **Ableitung von** f und wird als f' geschrieben. Sprechweise: «f Strich».

Aufgabe 18.2 Skizzieren Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:



Beispiel: Beschreibt die Funktion $s(t)$ die Strecke als Funktion der Zeit (z.B. $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$), ist deren Ableitung die entsprechende momentane Geschwindigkeit (also $v(t) = at + v_0$). Die Änderung der Geschwindigkeit wäre dann die Beschleunigung (also $a(t) = a$, in diesem Fall konstant).

Merke 18.2 Ableitung als Grenzwert von Sekantensteigungen

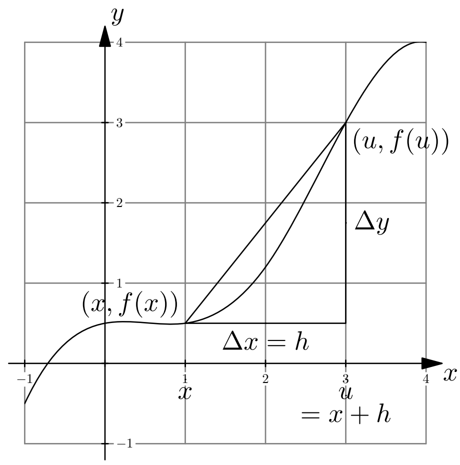
Die **Ableitung $f'(x)$ einer Funktion f an einer Stelle** x ist der folgende Limes (= Grenzwert) von Sekantensteigungen.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{u\to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}.$$

Sprechweise: «der Limes für h gegen Null von ...» bzw. «der Limes für u gegen x von ...»
Die Quotienten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{und} \quad \frac{f(u) - f(x)}{u - x}$$

von Differenzen heisst **Differenzenquotienten**.
Der obige Limes von Differenzenquotienten heisst **Differentialquotient**.



18.3 Ableitung von Potenzfunktionen

Aufgabe 18.3 Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x) = x^3$, indem Sie ermitteln, wie sich der Differenzenquotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ für h gegen Null verhält.

Differenzenquotient: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = \frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$

Grenzwert: $f'(x) = \lim_{h\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$

Kurzschreibweise: $(x^3)' = 3x^2$ Sprechweise: «die Ableitung von x^3 ist $3x^2$»

Aufgabe 18.4 Leiten Sie $f(x) = x^2$ ab (d. h. bestimmen Sie die Ableitung dieser Funktion). Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit dem früheren Resultat, dass die Tangente an die Normalparabel im Punkt (p, p^2) durch $t(x) = 2px - p^2$ gegeben ist.

Aufgabe 18.5 Leiten Sie $f(x) = x^n$ ab.

✎ Differenzenquotient: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots - x^n}{h} = nx^{n-1} + h(\ldots)$

Grenzwert: $f'(x) = \lim_{h\to 0}(nx^{n-1} + h\cdot(\ldots)) = nx^{n-1}$

Satz 1 Ableitung von Potenzfunktionen

Für beliebiges $p \in \mathbb{N}^+$ gilt: Die Ableitung von $f(x) = x^p$ ist $f'(x) = px^{p-1}$. In Kurzschreibweise:

$$(x^p)' = px^{p-1}$$

Der obige Satz gilt auch für negative ganzzahlige Exponenten und kann ähnlich wie oben bewiesen werden. Der obige Satz gilt sogar für reelle Exponenten. Der Beweis dafür wird später mit Hilfe der Exponentialfunktion mit Basis e (= Eulersche Zahl), dem natürlichen Logarithmus und der Kettenregel geführt.

Aufgabe 18.6 Was ist die Ableitung einer konstanten Funktion, wie z.B. $f(x) = 1$?

✎ Konstante Steigung 0. Also $(c)' = 0$ für $c \in \mathbb{R}$

18.4 Ableitungen von Vielfachen und Summen

Die Definition mit dem Grenzwert des Differenzenquotienten ist oft nicht praktikabel. Im Folgenden werden Regeln für das Ableiten hergeleitet, mit denen schliesslich beliebige Funktionen (zusammengesetzt aus Standard-Funktionen mit bekannter Ableitung) «einfach» abgeleitet werden können.

18.4.1 Vielfaches einer Funktion

Aufgabe 18.7 Gegeben sei eine Funktion $f(x)$ und deren Ableitung $f'(x)$. Für eine beliebige reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ betrachte die Funktion $g(x) = a \cdot f(x)$. Beweisen Sie, dass $g'(x) = a \cdot f'(x)$. Der Beweis kann auf verschiedene Arten erfolgen. Einerseits algebraisch mit Hilfe des Differenzenquotienten, andererseits geometrisch.

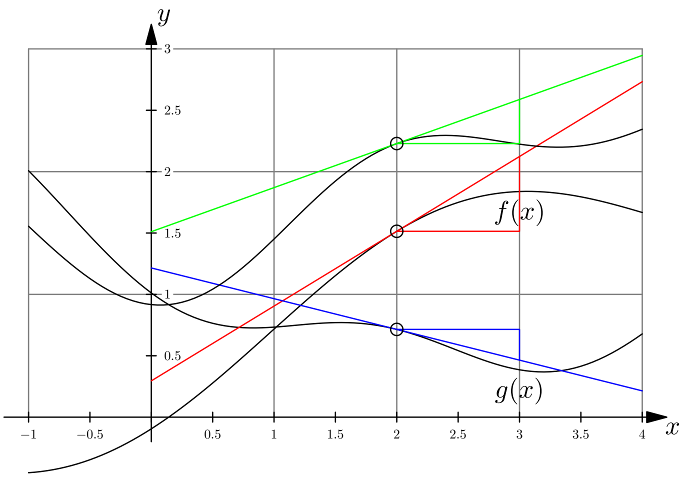
✎ $\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{a\cdot f(x+h) - a\cdot f(x)}{h} = a \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \xrightarrow{h\to 0} af'(x)$.

Geometrisch wird der Graph von f mit Faktor a in y-Richtung gestreckt. Jedes Steigungsdreieck einer Tangente wird entsprechend mitgestreckt, d.h. aus $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wird $\frac{a\Delta y}{\Delta x}$.

18.4.2 Summe zweier Funktionen

Aufgabe 18.8 Gegeben sind zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ und deren Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$. Daraus wird eine neue Funktion $h(x) = f(x) + g(x)$ gebildet. Mit Hilfe des Differenzenquotienten kann man relativ einfach zeigen, dass $h'(x) = f'(x) + g'(x)$. Mehr Einsicht gewinnt man aber mit einem geometrischen Beweis.

Skizzieren Sie $h(x)$ und die Tangente an die Funktionen bei $x_0 = 2$. Zeichnen Sie Steigungsdreiecke mit gleichem Δx ein. Was ist die Steigung von h im Punkt $x_0 = 2$?



Merke 18.3 Ableitung von Summen und Vielfachen

Die Ableitung der Summe von Funktionen ist die Summe der Ableitungen:

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x) \qquad \text{oder kurz} \qquad (f+g)' = f'+g'.$$

Die Ableitung eines (konstanten) Vielfachen einer Funkton ist das entsprechende Vielfache der Ableitung:

$$(a \cdot f(x))' = af'(x) \qquad \text{oder kurz} \qquad (a \cdot f)' = a \cdot f' \qquad \text{für beliebiges } a \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 18.9 Leiten Sie mit Hilfe der bereits bekannten Ableitungsregeln nach x ab:

a) $a(x) = x^{42}$
b) $b(x) = 5x^4$
c) $c(x) = x^3 + x^2$
d) $d(x) = 7$
e) $e(x) = x$
f) $f(x) = x \cdot x$
g) $g(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$
h) $h(x) = \frac{1}{x}$

18.5 Ableitung von Exponentialfunktionen

Präzises zur Eulerschen Zahl und zur Ableitung von e siehe Anhang B.

Im folgenden soll die Herleitung der Ableitung von Exponentialfunktionen skizziert werden.

Im ersten Schritt betrachten wir die konkrete Funktion $f(x) = 2^x$ und untersuchen deren Ableitung mit Hilfe des Differenzenquotienten, um zu zeigen, dass die Ableitung bis auf eine multiplikative Konstante die Funktion selbst ist:

✎ $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2^{x+h}-2^x}{h} = \lim_{h\to 0} \left(2^x \cdot \frac{2^{0+h}-2^0}{h}\right) =$
$= 2^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{2^{0+h}-2^0}{h} = 2^x \cdot f'(0)$

Die genau gleichen Umformungen sind gültig, wenn man die Basis 2 durch eine allgemeine Basis positive Basis $a \neq 1$ ersetzt. Es gilt also für $g(x) = a^x$:

$$g'(x) = (a^x)' = a^x \cdot g'(0) \qquad \text{wobei } g'(0) \in \mathbb{R}$$

Die Zahl $g'(0)$ direkt als Grenzwert zu bestimmen, übersteigt hier unsere Möglichkeiten. Anstatt $g'(0)$ für eine gegebene Basis a zu bestimmen, suchen wir eine Basis a so, dass $g'(0) = 1$ gilt (d.h. die Ableitung bei 0 möglichst einfach ist). Dies bedeutet, dass die Ableitung der Exponentialfunktion mit dieser Basis die Funktion selbst ist.

✎ Wir suchen a so, dass $1 = g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h)-g(0)}{h-0} = \lim_{h\to 0} \frac{a^h-a^0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}$.

Listing 1: Python-Code zur Annäherung der speziellen Basis für Ableitung 1 bei $x = 0$.

```
from math import e
a_max = 3
a_min = 2
h = 1e-6
genauigkeit = 1e-8

def differenzenquotient(a):
    return (a**h - 1) / h

while a_max - a_min > genauigkeit:
    a = (a_max + a_min) / 2
    if differenzenquotient(a) < 1:
        a_min = a
    else:
        a_max = a
    print(f"{a=}")
print(f"{e=}")
print(f"Fehler: {e - a}")
```

Definition 18.1 Eulersche Zahl e und $\exp(x)$

Die **Eulersche Zahl** e ist definiert als

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718281828459045.$$

Sie ist eine der wichtigsten mathematischen Konstanten.
Der *natürliche Logarithmus* ln ist der Logarithmus zur Basis e.
Man definiert die Funktion exp als:

$$\exp(x) := \mathrm{e}^x$$

Die Funktion $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ wird oft auch einfach als *die Exponentialfunktion* bezeichnet.

Merke 18.4 Ableitung von $f(x) = \mathrm{e}^x = \exp(x)$

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \qquad (\exp(x))' = \exp(x)$$

Die Ableitung der Exponentialfunktion mit Basis e ist die Funktion selbst.

Diese Eigenschaft mag erst mal als Kuriosität erscheinen, ist aber fundamental wichtig.
Soll ein Vorgang beschrieben werden, dessen Änderungsrate proportional zu seiner Grösse ist (z.B. ist am Anfang einer Epidemie die Zunahme der Ansteckungen proportional zur Anzahl der Infizierten sein), kann man zeigen, dass nur Exponentialfunktionen diese Eigenschaft haben.

Merke 18.5

Alle Funktionen feiern eine Party. Da kommt der Ableitungsoperator und schreit: «Ich leite Euch alle ab!». Alle Funktionen zittern vor Angst. Nur eine steht cool an der Bar und grinst: «Ich bin e^x!».

Aufgabe 18.10 Leiten Sie $f(x) = a^x$ ab, indem Sie die Funktion mit Basis e schreiben.

✎ Bereits bekannt ist, dass $f'(x) = a^x f'(0)$.
Bekannt ist auch $\exp'(0) = \exp(0) = 1 = \lim_{k\to 0} \frac{\exp(k)-1}{k}$.
Gesucht ist noch $f'(0)$. Umgeschrieben mit Basis e:
$f(x) = \mathrm{e}^{\ln(a^x)} = \mathrm{e}^{x\cdot\ln(a)}$
$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{h\ln(a)}-1}{h}$.
Wir schreiben $k = h\ln(a)$, also $h = \frac{k}{\ln(a)}$. Wenn $k \to 0$, dann auch $h \to 0$ und umgekehrt.
$f'(0) = \lim_{k\to 0} \frac{\mathrm{e}^k-1}{\frac{k}{\ln(a)}} = \lim_{k\to 0} \ln(a)\frac{\mathrm{e}^k-1}{k} = \ln(a)\cdot\exp'(0) = \ln(a)\cdot 1 = \ln(a)$
Und damit $(a^x)' = \ln(a)a^x$

Merke 18.6

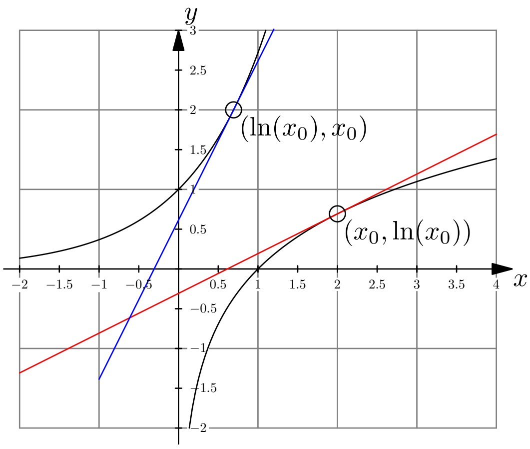
Die Ableitung der Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ ist (für beliebiges $a > 0$)

$$f'(x) = (a^x)' = \ln(a)a^x.$$

Insbesondere gilt $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

18.6 Ableitung der Umkehrfunktion

Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x) = \ln(x)$ (Logarithmus zur Basis e). Gehen Sie wie folgt vor:



a) Zeichnen Sie die Graphen von $f(x) = \ln(x)$ und $g(x) = \mathrm{e}^x$ ins gleiche Koordinatensystem. Was ist der geometrische Zusammenhang dieser beiden Graphen?
✎ Die Graphen gehen durch Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden auseinander hervor. Diese Spiegelung vertauscht x und y.

b) An der allgemeinen Stelle x_0 soll die Ableitung bestimmt werden. Für $x_0 = 2$ skizzieren Sie im Punkt $(x_0, \ln(x_0))$ die Tangente t_f an $f(x)$. Skizzieren Sie die Tangente t_g im gespiegelten Punkt an $g(x)$.

c) Bestimmen Sie die Tangentensteigung von t_g mit Hilfe der Ableitung von $g(x)$.
✎ Wir bestimmen den Wert der Ableitung von $g(x) = \mathrm{e}^x$ für das Argument $x = \ln(x_0)$, also $g'(\ln(x_0)) = \mathrm{e}^{\ln(x_0)} = x_0$.

d) Schliessen Sie daraus auf die Tangentensteigung von t_f und damit die Ableitungsfunktion von $f(x) = \ln(x)$.
✎ Beim Spiegeln eines Steigungsdreiecks an der Winkelhalbierenden werden Δx und Δy vertauscht. D.h. die Steigung von t_f ist der Kehrwert der Steigung von t_g. Und somit ist $\ln'(x_0) = \frac{1}{x_0}$. Und weil x_0 beliebig gewählt wurde, gilt die Überlegung für alle x und damit

$$\big(\ln(x)\big)' = \frac{1}{x}.$$

Merke 18.7 Ableitung des natürlichen Logarithmus

Es gilt:

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}.$$

Aufgabe 18.11 Mit Hilfe der Basiswechselformel leiten Sie $f(x) = \log_b(x)$ für eine beliebige Basis in $\mathbb{R}^\star \setminus \{1\}$ ab.

$(\log_b(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(b)}\right)' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot (\ln(x))' = \frac{1}{\ln(b)\cdot x}$

Merke 18.8 Ableitung einer beliebigen Logarithmusfunktion

Es gilt:

$$(\log_b(x))' =$$

Aufgabe 18.12 Analog zum Einführungsbeispiel mit der Ableitung des natürlichen Logarithmus, leiten Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ als Umkehrfunktion der Funktion $g(x) = x^2$ ab.

Merke 18.9 Ableitung der Wurzelfunktion

Es gilt:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}.$$

Beachten Sie, dass die Wurzelfunktion auch als Potenzfunktion mit $p = \frac{1}{2}$ abgeleitet werden kann (Beweis für beliebige p später):
$(x^p)' = px^{p-1}$.

Diese Methode kann auf beliebige Umkehrfunktionen verallgemeinert werden:

Merke 18.10 Ableitung der Umkehrfunktion

Die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} ist

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \qquad \text{bzw. kurz} \qquad \left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f}$$

18.7 Ableitung als Approximation

In 3aLIM den üblichen Beweis der Kettenregel erklärt (und Approximationskram weggelasssen), was meiner Meinung nach sinnvoller ist (OS).

Die Tangente an den Graphen von $f(x)$ in einem Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist die beste lineare Approximation an die Funktion. Insbesondere sind die beiden Graphen in einer kleinen Umgebung um den Punkt $(x_0, f(x_0))$ kaum zu unterscheiden. Konkret:

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h \qquad \text{für kleine } h.$$

Skizze:

✎ Die Ableitung $f'(x_0)$ ist der Proportionalitätsfaktor der angibt, wie viel mal mehr sich der Funktionswert ändert, wenn sich x_0 ändert. Oder salopp ausgedrückt: «Wenn x_0 wackelt, dann wackelt der Funktionswert $f'(x_0)$ mal so viel».

Die lineare Approximation kann nun verwendet werden, um weitere Ableitungsregeln wie die Kettenregel einsichtig zu machen. Bewiesen wird die Kettenregel aber normalerweise über Grenzwerte von Differenzenquotienten, was zwar «wasserdicht» ist, aber kaum eine intuitive Einsicht fördert.

Um die Kettenregel zu verstehen, ist erst eine kurze Repetition nötig:

Aufgabe 18.13 Gegeben sind die fünf Funktionen $f(x) = x^5$, $g(x) = 2^x$, $h(x) = \ln(x)$, $k(x) = \sqrt{x}$. Bestimmen Sie folgende Ausdrücke:

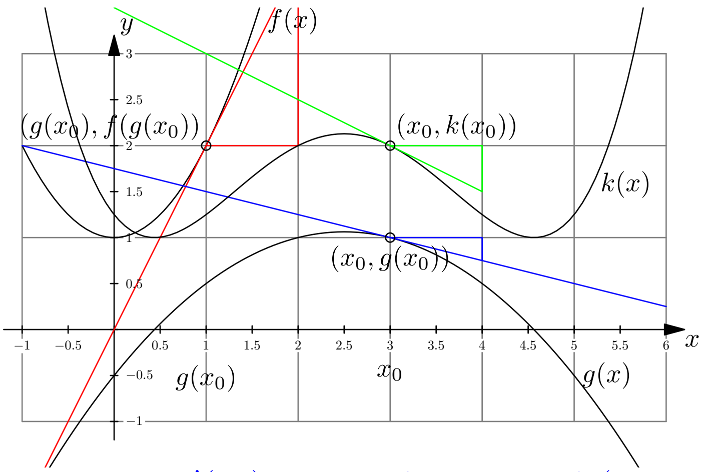
a) $f(g(x))$
b) $g(f(x))$
c) $f(k(x))$
d) $k(h(f(x)))$
e) $g(f(h(x)))$
f) $h(g(k(x)))$

Aufgabe 18.14 Bestimmen Sie jeweils zwei nicht-triviale Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ so, dass $f(x) = g(h(x))$.

a) $f(x) = \ln\left(x^5\right)$
b) $f(x) = \sqrt{4^x}$
c) $f(x) = 2^{x^2}$
d) $f(x) = (2^x)^2$

18.8 Kettenregel

Aufgabe 18.15 Gegeben sind zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$. Daraus wird eine neue Funktion $k(x) = f(g(x))$ gebildet.



a) Skizzieren Sie $k(x)$.

b) Skizzieren Sie die Tangente t_g im Punkt $x_0 = 3$ an g, die Tangente t_f im Punkt $g(x_0)$ an f und die Tangente t_k im Punkt x_0.

c) Was ist der Zusammenhang dieser drei Steigungen?
Oder salopp ausgedrückt: «Wie fest wackeln die Funktionswerte, wenn x_0 wackelt?».

✎ «Wackelt x_0, wackelt $g(x_0)$ um den Faktor $g'(x_0)$ mal so fest. Und f (an der Stelle $g(x_0)$) wackelt um den Faktor $f'(g(x_0)$ mal so fest wie $g(x_0)$. Also wackelt $k(x_0) = f(g(x_0))$ um den Faktor $f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ mal so fest wie x_0.»

Aufgabe 18.16 Gegeben sind zwei Funktionen $f(x)$, $g(x)$ und deren Ableitungen. Daraus wird die Funktion $k(x) = f(g(x))$ definiert. Bestimmen Sie die Ableitung $k'(x)$. Schreiben Sie dazu f, g und k als lineare Approximationen.

Merke 18.11 Kettenregel

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad \text{oder kurz} \qquad (f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

f wird **äussere Funktion**, g **innere Funktion** genannt.
Der Operator $\circ$ bedeutet die Verknüpfung von Funktionen und $f \circ g$ wird «f nach g» gelesen.

Aufgabe 18.17 Bestimmen Sie folgende Ableitungen. In einigen Fällen kann die Funktion nach Umformungen auch ohne Kettenregel abgeleitet werden.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ b) $f(x) = (\mathrm{e}^x)^2$ c) $f(x) = \ln\left(x^7\right)$ d) $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x\right)$

e) $f(x) = g(h(k(x)))$ f) $f(x) = \mathrm{e}^{p\ln(x)}$ g) $f(x) = (\ln(x))^4$ h) $f(x) = \frac{1}{k(x)}$

Aufgabe 18.18 Mit Hilfe der Kettenregel kann nun die Formel zur Ableitung von Potenzfunktionen $f(x) = x^p$ für alle Exponenten $p \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ bewiesen werden. Vorgehen: Schreiben Sie $f(x)$ als Exponentialfunktion mit Basis e, wenden Sie ein Logarithmusgesetz an, leiten Sie ab und formen Sie wieder um.

✎ $f(x) = x^p = \mathrm{e}^{\ln(x^p)} = \mathrm{e}^{p\ln(x)}$ $f(x) = g(h(x))$ mit $g(x) = \mathrm{e}^x$ und $h(x) = p\ln(x)$.

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \mathrm{e}^{p\ln(x)} \cdot p \cdot \frac{1}{x} = x^p \cdot p \cdot \frac{1}{x} = p \cdot x^{p-1}$$

18.9 Produktregel

Als «letzte» Regel leiten wir die Produktregel her. Diese Herleitung ist technisch und gibt Einblick in einen in der Mathematik «geläufigen Trick», wo zu Termen Null addiert wird (oder mit Eins multipliziert wird).

Aufgabe 18.19 Gegeben sind zwei Funktionen f und g und deren Ableitungen. Zu bestimmen ist die Ableitung der Funktion $k(x) = f(x) \cdot g(x)$.

$$k'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{k(x+h)-k(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) \overbrace{-f(x)\cdot g(x+h) + f(x)\cdot g(x+h)}^{0} - f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

✎

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-f(x))\cdot g(x+h) + f(x)\cdot(g(x+h)-g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-f(x))\cdot g(x+h)}{h} + \frac{f(x)\cdot(g(x+h)-g(x))}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} =$$

$$= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Merke 18.12 Produktregel

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \text{oder kurz} \qquad (fg)' = f'g + fg'$$

Aufgabe 18.20 Gegeben sind Funktionen $f(x)$, $g(x)$ und deren Ableitungen. Daraus wird die Funktion $p(x) = f(x)\cdot g(x)$ definiert. Bestimmen Sie die Ableitung $p'(x)$, indem Sie $p(x+h)$ mit Hilfe von f und g und deren linearen Approximationen im Punkt x_0 schreiben. Aus dem Resultat kann die Ableitung von p abgelesen werden. Der Term in h^2 ist für kleine h vernachlässigbar.

Aufgabe 18.21 Leiten Sie ab:

a) $f(x) = x^{42}\cdot \ln(x)$ b) $f(x) = \sqrt{x}\cdot \mathrm{e}^x$ c) $f(x) = 2^x \cdot x^{-2}$ d) $f(x) = x^5 \cdot x^4$

Aufgabe 18.22 Mit Hilfe der Produktregel und der Kettenregel leiten Sie die Quotientenregel her. Bestimmen Sie die Ableitung von $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, wenn die Funktionen f und g und deren Ableitungen gegeben sind. Schreiben Sie dazu die Funktion als Produkt.

✎ $k(x) = f(x)\cdot (g(x))^{-1}$ und damit

$$k'(x) = f(x)\cdot(-1)(g(x))^{-2}\cdot g'(x) + f'(x)\cdot(g(x))^{-1} =$$

$$-\frac{f(x)g'(x)}{(g(x))^2} + \frac{f'(x)}{g(x)} = -\frac{f(x)g'(x)}{(g(x))^2} + \frac{f'(x)g(x)}{(g(x))^2} =$$

$$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Merke 18.13 Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \qquad \text{oder kurz} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

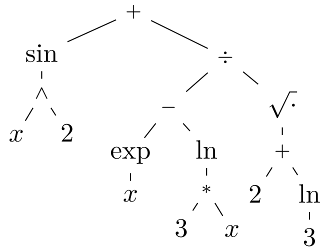
Aufgabe 18.23 Leiten Sie ab und vereinfachen Sie:

a) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^3}$ b) $f(x) = \frac{x^5}{x^3}$ c) $f(x) = \frac{\log_2(x)}{2^x}$ d) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}$

18.10 Termanalyse, Termbäume und Ableitungsregeln

Das Wichtigste beim Ableiten komplizierterer Funktionen ist zu erkennen, welche Regel angewendet werden soll. Hierfür ist es hilfreich, die Funktion als Baum darzustellen. Je nach Operation oder Funktion in der Wurzel und der Art der Unterbäume wird die entsprechende Regel angewandt und die Unterbäume abgeleitet. Zur Repetition: «Termanalyse, Kapitel 2.2, Seite 15».
Funktionen werden als Knoten mit nur einem Unterbaum dargestellt. Speziell wird die e^x-Funktion als «`exp`» notiert.

Beispiel:
Der Ausdruck $\sin\left(x^2\right) + \dfrac{\mathrm{e}^x - \ln(3 \cdot x)}{\sqrt{2 + \ln(3)}}$ wird als



dargestellt.

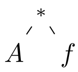
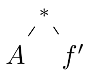
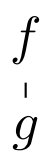
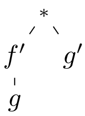
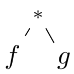
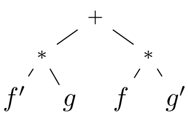
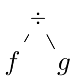
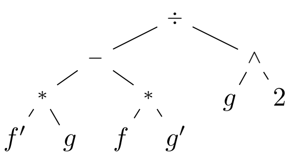
Aufgabe 18.24 Zeichnen Sie die entsprechenden Termbäume für folgende Ausdrücke ohne Vereinfachen.

a) $\ln\left(3 \cdot x - \sqrt{2}\right) \cdot \mathrm{e}^{2-4 \cdot x}$ b) $\dfrac{\frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2}}{\ln\left(\sqrt{x}\right)}$ c) $x + x^2 + \dfrac{\mathrm{e}^x}{4 \cdot x}$

d) $\sqrt{\ln\left(x^2 + \mathrm{e}^x\right)}$ e) $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} + \left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}}\right)^x + \mathrm{e}^{x^{\mathrm{e}}}$ f) $x - \sqrt{x} + \ln(x) \cdot \mathrm{e}^x$

18.11 Ableitungsregeln mit Bäumen

Im Folgenden steht A für beliebige Ausdrücke ohne x. Ausdrücke, bzw. Funktionsterme, die x enthalten, werden mit f und g geschrieben:

Regel	Funktionsterm	Ableitung	Algebraisch
Konstante	A	0	$(c)' = 0$
Konstanter Faktor			$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
Kettenregel			$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Produktregel			$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotientenregel			$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Merke 18.14 Ableitungen einiger Grundfunktionen

$$(x^p)' = px^{p-1} \qquad (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \qquad (a^x)' = \ln(a)a^x \qquad (\ln(x))' = \frac{1}{x} \qquad (\log_a(x))' = \frac{1}{\ln(a)x}$$

Aufgabe 18.25 Leiten Sie ab und vereinfachen Sie:

a) e^{2x} b) $x \cdot 2^x$ c) $\frac{\ln(x)}{x}$

d) $\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x}}{\ln(4x)}$ e) $\ln\left(\sqrt{2^x}\right)$ f) $\mathrm{e}^{x^2} \cdot \sqrt{x + \frac{1}{x}}$

Aufgabe 18.26 Leiten Sie ab. Das Resultat braucht nicht vereinfacht zu werden.

a) $f(x) = \frac{\sqrt{e^{-x} \cdot \ln(x)}}{x^2}$ b) $f(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x^4 \cdot \log_7(42)} - 2^{1-x^2}$ c) $f(x) = 1 + 2x^3 - \frac{4 \cdot \ln(5x \cdot 6^x)}{\sqrt[7]{x^8 \cdot \ln(9)}}$

Aufgabe 18.27 Leiten Sie ab und vereinfachen Sie (Resultat in c) als Bruch).

a) $f(x) = \left(x^2 - 2x + 2\right) e^x$ b) $f(x) = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$ c) $f(x) = \frac{x^2+2x}{2} + 2\ln(x-1)$

Aufgabe 18.28 Bestimmen Sie die hundertste Ableitung $f^{(100)}$ von $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

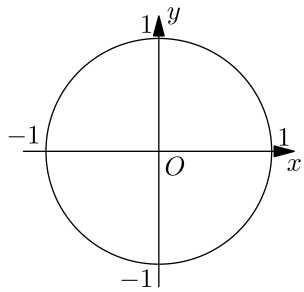
18.12 Ableitung der trigonometrischen Funktionen

In der Analysis werden wir fortan die **Winkel** immer im **Bogenmass** angeben. Das hat praktische Vorteile, wie gleich ersichtlich sein wird.

Repetition Bogenmass: Das Bogenmass eines Winkels ist die Länge des entsprechenden Bogens auf dem Einheitskreis. D.h. $0°$ bis $360°$ entspricht dann dem Bogenmass von 0 bis 2π.

Gradmass	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
Bogenmass	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

18.12.1 Gleichmässige Kreisbewegung



Wir betrachten einen Punkt P, der eine gleichförmige Kreisbewegung im positivem Umlaufsinn auf dem Einheitskreis mit Geschwindigkeit 1 und Startpunkt $(1, 0)$ (zur Zeit $t = 0$) ausführt. Wir notieren mit $P(t)$ die Koordinaten des Punktes P zum Zeitpunkt t.

- Tragen Sie die Zeitpunkte im Einheitskreis (z.B. mit $t = 0$) ein, zu denen sich der Punkt P auf den Achsen befindet.
- Tragen Sie in der Skizze den Punkt $P(0.5)$ ein, also P zur Zeit $t = \frac{1}{2}$.
- Zum Zeitpunkt t hat P die Koordinaten $P(t) = (x(t), y(t))$, wobei $x(t)$ und $y(t)$ zwei Funktionen sind. Welche genau? Tragen Sie diese ebenfalls in der Skizze ein.
- Wie lang ist der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$? Was ist die Beziehung zwischen $\vec{OP}(t)$ und $\vec{v}(t)$? Zeichnen Sie $\vec{v}(t)$ ein.
- Tragen Sie die Komponenten von $\vec{v}(t)$ ein.
- In welche Richtung wirkt die Beschleunigung $\vec{a}(t)$?

Die Komponenten von $\vec{v}(t)$ entsprechen den Ableitungen der Koordinaten von $P(t)$.

Merke 18.15 Ableitung von Cosinus und Sinus

Für x im Bogenmass gilt:

$$(\sin(x))' = \cos(x) \qquad (\cos(x))' = -\sin(x)$$

Aufgabe 18.29 Wie gross ist die Geschwindigkeit der Kreisbewegung, wenn man den Winkel im Gradmass misst, d.h. eine Umdrehung erst nach $t = 360$ vollendet ist? Was bedeutet das für die Ableitungen von $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ wenn α im Gradmass gemessen wird?

Aufgabe 18.30 Leiten Sie $\tan(x)$ ab (dabei ist wie üblich x im Bogenmass gemessen).

Aufgabe 18.31 Sei $P(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Bestimmen Sie den Beschleunigungsvektor $\vec{a}(t)$, indem Sie $\vec{OP}(t)$ zwei mal ableiten. Wie gross ist der Betrag der Beschleunigung? Was ist die Richtung von $\vec{a}(t)$ bezüglich $\vec{OP}(t)$?

Aufgabe 18.32 Leiten Sie nach x ab. Ohne Vereinfachen.

a) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2+\ln(x)}$ b) e^{e^x} c) $\frac{1}{1+x^2}$

d) $\sin(\cos(x))$ e) $\sqrt{1-(\sin(x))^2}$ f) $\cos(x)\cdot\tan(x)$

g) $\left(3x^3-x\right)^5$ h) $\left(\frac{7x-2}{\sqrt{x+2}}\right)^4$ i) $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$

18.13 Ableitung nach anderen Variablen

Meist ist es implizit klar, nach welcher Variablen abgeleitet werden soll, weil Funktionen (für uns bis jetzt) normalerweise nur ein Argument haben.

Physikalische Formeln z.B. hängen in der Regel von mehreren Grössen ab und es kann nach jeder dieser Grössen abgeleitet werden. Z.B. lässt sich die Leistung einer Windturbine mit folgender Formel berechnen:

$$P=\frac{1}{2}\rho\cdot\pi r^2\cdot v^3,$$

wobei ρ die Dichte der Luft, r der Radius der Turbine und v die Windgeschwindigkeit ist.

Um die Frage zu beantworten, wie sich die Leistung ändert, wenn sich die Geschwindigkeit ändert, leitet man P nach v ab und notiert:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}P=\frac{3}{2}\rho\cdot\pi r^2\cdot v^2 \qquad \text{Lies: «d nach d } v \text{ von } P\text{»}$$

Aus dieser Formel liest man ab, dass bei grösseren Geschwindigkeiten schon kleine Änderungen in der Windgeschwindigkeit grosse Änderungen in der Leistung zur Folge haben. Aus diesem Grund müssen diese Anlagen gut vor Böen geschützt werden, indem man z.B. die Rotorblätter rechtzeitig dreht.

Aufgabe 18.33 Leiten Sie nach jeder Variablen ab. Können Sie die Formeln dem physikalischen Kontext zuordnen?

a) $F=m\cdot a$ b) $E=\frac{1}{2}m\cdot v^2$ c) $y=a\cdot\sin(\omega t)$ d) $U=R\cdot I$

e) $F_G=\gamma\frac{m_1\cdot m_2}{r^2}$ f) $F_Z=\frac{m\cdot v^2}{r}$ g) $F_Z=m\cdot r\cdot\omega^2$ h) $s=\frac{1}{2}a\cdot t^2+v_0\cdot t+s_0$

A Ableitungen wichtiger Funktionen und Ableitungsregeln

Merke 1.16 Ableitungen wichtiger Funktionen

- Ableitung konstanter Funktionen:
$$a' = 0$$
Hier ist $a \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl und die abgeleitet Funktion ist die konstante Funktion $f(x) = a$.

- Ableitung von Potenzfunktionen:
$$(x^a)' = ax^{a-1}$$
Die Formel gilt für alle $a \in \mathbb{Z}$, wobei der Fall $a = 0$ als $(x^0)' = (1)' = 0$ zu interpretieren ist.
Im Fall $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ist die Funktion x^a nur für $x \geq 0$ definiert.
Spezialfall: Ableitung von Wurzelfunktionen:
$$\left(\sqrt[m]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)' = \frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1} = \frac{x^{\frac{1}{m}}}{mx} = \frac{\sqrt[m]{x}}{mx} \qquad \text{Spezialfall} \qquad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- Ableitung von Exponentialfunktionen (für beliebiges reelles $a > 0$):
$$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a) \qquad \text{Spezialfall} \qquad (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$$

- Ableitung von Logarithmusfunktionen (für beliebiges reelles $a > 0$):
$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)} \qquad \text{Spezialfall} \qquad (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

Merke 1.17 Ableitungsregeln

- Ableitung skalarer Vielfacher einer Funktion (für $a \in \mathbb{R}$ beliebig):
$$(af)' = af' \qquad \text{bzw. ausführlich} \qquad \big(af(x)\big)' = af'(x)$$

- Ableitung der Summe zweier Funktionen:
$$(f+g)' = f' + g' \qquad \text{bzw. ausführlich} \qquad \big(f(x)+g(x)\big)' = f'(x) + g'(x)$$

- Produktregel: Ableitung des Produkts zweier Funktionen:
$$(fg)' = f'g + fg' \qquad \text{bzw. ausführlich} \qquad \big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

- Quotientenregel: Ableitung des Quotienten zweier Funktionen:
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad \text{bzw. ausführlich} \qquad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

- Ableitung der Umkehrfunktion: Hat eine Funktion f eine Umkehrfunktion f^{-1}, so gilt
$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f} \qquad \text{bzw. ausführlich} \qquad \left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}$$

B Einige Beweise: Eulersche Zahl und der Grenzwert von $\frac{e^h-1}{h}$

In diesem Anhang soll einerseits die Definition der Eulerschen Zahl e erklärt und andererseits der Grenzwert $\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h-1}{h}$ bestimmt werden. (Quelle: Lambacher-Schweizer, relativ alte Ausgabe.)

B.1 Zur Definition der Eulerschen Zahl

Die Eulersche Zahl hatten wir per

$$\mathrm{e} := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

definiert. Die Existenz dieses Grenzwerts soll nun genau begründet werden. Dazu verwenden wir die folgende Abschätzung.

Satz 2 Bernoullische Ungleichung

Für jede reelle Zahl $x \geq -1$ und jede natürliche Zahl n gilt Im Fall $n = 0$ und $x = -1$ wird die Konvention $0^0 = 1$ verwendet.

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Variante mit strikter Ungleichung: Falls zusätzlich $x \neq 0$ und $n \geq 2$ gelten, gilt sogar die strikte Ungleichung

$$(1 + x)^n > 1 + nx$$

Merkhilfe: Nach dem Binomischen Lehrsatz gilt $(1 + x)^n = 1^n + n1^{n-1}x + \cdots = 1 + nx + \ldots$. Für $x \geq -1$ darf man also das Gleichheitszeichen in ein $\geq$-Zeichen verwandeln und die durch Punkte angedeuteten Terme weglassen.

Beweis. Für $n = 0$ gilt die Ungleichung sicherlich: $(1 + x)^0 = 1 \geq 1 + 0x = 1$. Ebenso gilt die Ungleichung sicherlich für $n = 1$, denn $(1 + x)^1 = 1 + x = 1 + 1 \cdot x$.

Wir zeigen nun, dass die Ungleichung auch für $n + 1$ gilt, wenn sie für n gilt. Da sie für $n = 0$ gilt, folgt daraus, dass sie für alle natürlichen Zahlen gilt (denn aus der Gültigkeit für $n = 0$ folgt die Gültigkeit für $n = 1$, daraus die für $n = 2$ etc.).[1] Wer mag, darf auch mit dem Fall $n = 1$ starten und sich dann zu $n = 2$ usw. hocharbeiten.

Nehmen wir an, dass die Ungleichung

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

für eine natürliche Zahl n gilt. Multiplizieren wir diese Ungleichung mit $1 + x$ und beachten, dass das $\geq$-Zeichen wegen $1 + x \geq 0$ erhalten bleibt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} (1 + x)^n \cdot (1 + x) &\geq (1 + nx)(1 + x) \\ \Longrightarrow \quad (1 + x)^{n+1} &\geq 1 + x + nx + nx^2 \underbrace{\geq}_{\text{sogar } > \text{ im Fall } n \geq 1 \text{ und } x \neq 0} 1 + (n + 1)x \end{aligned}$$

Damit stimmt die behauptete Ungleichung auch für $n + 1$. Die Variante mit strikter Ungleichung wurde dabei gleich mitbewiesen (dank der «Unterklammerung»). □

Satz 3

Der Grenzwert

$$\mathrm{e} := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

existiert und wir **Eulersche Zahl** genannt. Es gilt $\mathrm{e} \approx 2.71828$.

Im Beweis geben wir genauer eine «Intervallschachtelung» für diesen Grenzwert an (und beweisen wohl mehr, als wir hier bräuchten; später wird dies aber hilfreich sein).

[1] Diese Beweismethode heisst «vollständige Induktion».

Beweis. Wir betrachten die beiden Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$, die wie folgt definiert sind.

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ b_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Wir zeigen:

(a) Die Folge (a_n) ist streng monoton wachsend.

(b) Die Folge (b_n) ist streng monoton fallend.

(c) Es gilt $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) Die Differenz $b_n - a_n$ strebt für $n \to \infty$ gegen Null.

Aus diesen Behauptungen folgt, dass die beiden Folgen (eine Intervallschachtelung definieren und) gegen eine reelle Zahl konvergieren, was die Behauptung zeigt. Nun zu den Beweisen:

(a) Für jedes natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{1+n}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(\frac{1+n}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \overset{\text{Bernoulli}}{>} \left(1-n\cdot\frac{1}{n^2}\right)\cdot\frac{n}{n-1} \\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{n}{n-1} = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n-1} = 1 \end{aligned}$$

Man beachte, dass wir den «strikten Bernoulli» anwenden durften wegen $n \geq 2$ und $0 \neq x = -\frac{1}{n^2} \geq -1$. Die obigen Umformungen zeigen $\frac{a_n}{a_{n-1}} > 1$, d.h. $a_n > a_{n-1}$ (beachte: $a_{n-1} > 0$), d.h. (a_n) ist streng monoton wachsend.

(b) Ähnlich gilt für jedes $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \frac{b_{n-1}}{b_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = h\frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \\ &= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \overset{\text{Bernoulli}}{>} \left(1+(n+1)\cdot\frac{1}{n^2-1}\right)\cdot\frac{n-1}{n} \\ &= \left(1+\frac{1}{n-1}\right)\cdot\frac{n-1}{n} = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n} = 1 \end{aligned}$$

Auch hier durften wir den «strikten Bernoulli¿ anwenden wegen $n+1 \geq 3 \geq 2$ und $x = \frac{1}{n^2-1} > 0$. Wegen $b_n > 0$ folgt daraus $b_{n-1} > b_n$, d.h. die Folge (b_n) ist streng monoton fallend.

(c) Wegen $1 < 1 + \frac{1}{n}$ folgt $a_n < a_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = b_n$.

(d) Es gilt $0 < b_n - a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)a_n - a_n = \frac{a_n}{n} < \frac{b_n}{n} < \frac{b_1}{n} = \frac{4}{n}$. Da $\frac{4}{n}$ für $n \to \infty$ gegen Null strebt, strebt auch das «zwischen 0 und $\frac{4}{n}$ eingesperrte» $b_n - a_n$ gegen Null.

Da die Folge (a_n) monoton wächst und nach oben beschränkt ist (wegen $a_n < b_n < b_1 = 4$), konvergiert sie gegen eine reelle Zahl.

Da die Folge (b_n) monoton fällt und nach unten beschränkt ist (wegen $b_n > a_n > a_1 = 2$), konvergiert sie gegen eine reelle Zahl.

Weil $b_n - a_n$ gegen Null strebt, müssen unsere beiden Folgen gegen *dieselbe* Zahl konvergieren, die wir e nennen. □

B.2 Die Ableitung der Exponentialfunktion

Wenn man die Exponentialfunktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ ableiten möchte, beginnt man in der Regel wie folgt

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \lim_{h\to 0} \mathrm{e}^x \cdot \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h}}_{=f'(0)}$$

Nun muss man den Grenzwert rechts bestimmen, also $f'(0)$. Dies ist nicht ganz einfach.

Satz 4

Es gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$$

d. h. der angegebene Grenzwert existiert und hat den Wert 1.
Folglich gilt $(e^x)' = e^x$ (dies ist dann klar nach der obigen Rechnung).

Beweis. (a) Zuerst möchten wir verstehen, wie sich die Zahlenfolge $\frac{\mathrm{e}^h - 1}{h}$ verhält, wenn h nacheinander die Werte $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ annimmt («rechtsseitiger Grenzwert»).

Nach dem Beweis von Satz 3 gilt für alle $m, n \geq 2$ die Abschätzung $a_n < e < b_m$, d. h. insbesondere

$$\begin{aligned}
& & a_n < e < b_{n-1} & \\
&\iff & \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n & \quad \mid (\cdot)^{\frac{1}{n}} \\
&\iff & 1 + \frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n-1} & \\
&\iff & \frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{1}{n-1} & \quad \mid : \frac{1}{n} \\
&\iff & 1 < \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} < \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1} &
\end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ geht also $\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$ gegen 1.

Setzt man dabei $h = \frac{1}{n}$, so gilt also $\frac{e^h - 1}{h} \to 1$.

(b) Nun möchten wir verstehen, wie sich die Zahlenfolge $\frac{\mathrm{e}^h - 1}{h}$ verhält, wenn h nacheinander die Werte $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$ annimmt («linksseitiger Grenzwert»).

Wir starten mit der mittleren der oberen Abschätzungen. Beachte: Gilt $x < y$ für positive reelle Zahlen x und y, so kann man sowohl durch $x > 0$ als auch durch $y > 0$ dividieren (oder gleich durch $xy > 0$) und erhält $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ bzw. $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$. Mit anderen Worten drehen sich beim Kehrwert-Nehmen die Vergleichszeichen um.

$$
\begin{aligned}
&\iff & 1+\frac{1}{n} &< e^{\frac{1}{n}} < 1+\frac{1}{n-1} & \\
&\iff & \frac{n+1}{n} &< e^{\frac{1}{n}} < \frac{n}{n-1} & \mid \text{Kehrwerte nehmen}\\
&\iff & \frac{n}{n+1} &> e^{-\frac{1}{n}} > \frac{n-1}{n} & \\
&\iff & 1-\frac{1}{n+1} &> e^{-\frac{1}{n}} > 1-\frac{1}{n} & \\
&\iff & -\frac{1}{n+1} &> e^{-\frac{1}{n}}-1 > -\frac{1}{n} & \mid \text{Division durch } -\frac{1}{n}<0\\
&\iff & \frac{n}{n+1} &< \frac{e^{-\frac{1}{n}}-1}{-\frac{1}{n}} < 1 & \\
&\iff & 1-\frac{1}{n+1} &< \frac{e^{-\frac{1}{n}}-1}{-\frac{1}{n}} < 1 &
\end{aligned}
$$

Für $n \to \infty$ geht der mittlere Ausdruck also gegen 1.

Wenn also h die Werte $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ etc. durchläuft, strebt $\frac{e^h-1}{h} \to 1$.

(c) Beachte: $f(x) = e^x$ wächst (streng) monoton: Beweis-Skizze: Für $y = x+\ell$ mit $\ell > 0$ gilt $e^y = e^x \cdot e^\ell$ und $e^\ell > 1$ (muss wohl ℓ per $\frac{m}{n}$ approximieren, $e^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{e^m}$ und aus $e > 1$ folgt $e^m > 1$ und dann $\sqrt[n]{e^m} > 1$ da «Hoch m» streng monoton wachsend ist und daher dasselbe für die Umkehrfunktion «n-te Wurzel» gilt.

(d) Durchläuft h eine gegen Null strebende Folge positiver reeller Zahlen, so gibt es für jedes $h < 1$ (genau) ein (von h abhängiges) $n \geq 2$ mit

$$\frac{1}{n} \leq h < \frac{1}{n-1}$$

Wenn h gegen Null geht, geht n also gegen ∞. Multipliziert man die diese Ungleichungen mit n, so folgt $1 \leq hn \leq \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}$. Für $h \to 0$ folgt wegen $n \to \infty$, dass $hn \to 1$ und $h(n-1) = hn - h \to 1$.

Wegen der strengen Monotonie von $f(x) = e^x$ folgt aus der obigen Abschätzung

$$
\begin{gathered}
e^{\frac{1}{n}} \leq e^h < e^{\frac{1}{n-1}}\\
e^{\frac{1}{n}}-1 \leq e^h-1 < e^{\frac{1}{n-1}}-1\\
\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{h} \leq \frac{e^h-1}{h} < \frac{e^{\frac{1}{n-1}}-1}{h}\\
\underbrace{\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}}_{\to 1 \text{ nach (a) für } h\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{nh}}_{\to 1 \text{ für } h\to 0} \leq \frac{e^h-1}{h} < \underbrace{\frac{e^{\frac{1}{n-1}}-1}{\frac{1}{n-1}}}_{\to 1 \text{ nach (a) für } h\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{h(n-1)}}_{\to 1 \text{ für } h\to 0}
\end{gathered}
$$

Somit haben wir $\frac{e^h-1}{h}$ «ge-sandwich-ed». Wie durch die «Unterklammerungen» angedeutet, gehen der linke und der rechte Term für $h \to 0$ gegen 1. Also geht auch der mittlere Term wie gewünscht gegen 1.

(e) Durchläuft h eine gegen Null strebende Folge negativer reeller Zahlen, so sieht man auf ähnliche Weise, dass $\frac{e^h-1}{h} \to 1$.

(f) Zusammengenommen: Durchläuft h eine gegen Null strebende Folge reeller Zahlen ungleich Null, so gilt $\frac{e^h-1}{h} \to 1$.

□

B.3 Lösungen

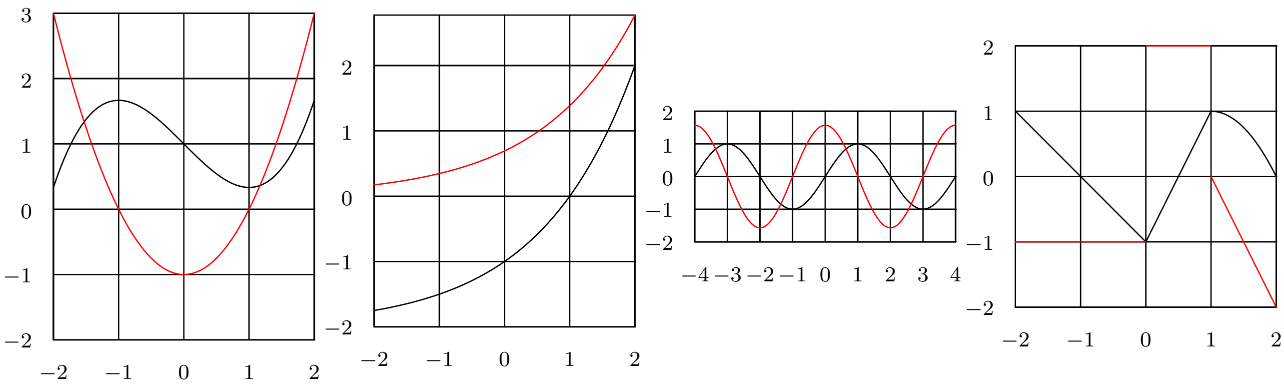
Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 18.2 ex-ableitungenskizzieren



Lösung zu Aufgabe 18.9 ex-polynome-und-potenzfunktionen-ableiten

a) $a'(x) = 42x^{41}$

b) $b'(x) = 20x^3$

c) $c'(x) = 3x^2 + 2x$

d) $d'(x) = 0$

e) $e'(x) = 1$

f) $f'(x) = \left(x^2\right)' = 2x$

g) $g'(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

h) $h'(x) = \left(x^{-1}\right)' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

Lösung zu Aufgabe 18.12 ex-wurzel-ableiten

Gesucht ist die Tangentensteigung an den Graphen von $f(x) = \sqrt{x}$. Wir wählen einen Punkt $(x_0, \sqrt{x_0})$ auf dem Graphen von $f(x)$. Der entsprechende Punkt auf $g(x)$ hat die Koordinaten $(\sqrt{x_0}, x_0)$. Die Tangentensteigung in diesem Punkt erhalten wir durch die Ableitung von $g'(x) = 2x$, also $g'(\sqrt{x_0}) = 2\sqrt{x_0}$.

Der Kehrwert davon ist die Tangentensteigung an der Stelle x_0. Wir folgern

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Lösung zu Aufgabe 18.13 ex-funktionen-verschachteln

a) $f(g(x)) = (2^x)^5$

b) $g(f(x)) = 2^{x^5}$

c) $f(k(x)) = (\sqrt{x})^5$

d) $k(h(f(x))) = \sqrt{\ln\left(x^5\right)}$

e) $g(f(h(x))) = 2^{(\ln(x))^5}$

f) $h(g(k(x))) = \ln\left(2^{\sqrt{x}}\right)$

Lösung zu Aufgabe 18.14 ex-funktionen-entschachteln

a) $f(x) = \ln\left(x^5\right) \qquad g(x) = \ln(x),\ h(x) = x^5$

b) $f(x) = \sqrt{4^x} \qquad g(x) = \sqrt{x},\ h(x) = 4^x$

c) $f(x) = 2^{x^2} \qquad g(x) = 2^x,\ h(x) = x^2$

d) $f(x) = (2^x)^2 \qquad g(x) = x^2,\ h(x) = 2^x$

Lösung zu Aufgabe 18.16 ex-kettenregel-mit-linearer-approximation-herleiten

Es gilt $f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h$ und $g(x_0+h) \approx g(x_0) + g'(x_0)h$. Es gilt also:

$$k(x_0+h) = f(g(x_0+h)) \approx f\left(g(x_0) + \underbrace{h \cdot g'(x_0)}_{h_2}\right) \approx f(g(x_0)) + h_2 f'(g(x_0)) = f(g(x_0)) + h \cdot g'(x_0) f'(g(x_0))$$

Der erste Term ist $k(x_0)$, der zweite ist also $h \cdot k'(x_0)$. Wir schliessen daraus

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Intuitiv kann man die Sache wie folgt verstehen: Das Argument in f ändert sich nicht mit Änderungsrate 1 (wie wenn dort nur x stehen würde) sondern mit Änderungsrate $g'(x)$. Darum wird die Änderungsrate noch damit multipliziert. Man spricht von der inneren Ableitung.

Lösung zu Aufgabe 18.17 ex-kettenregel-anwenden

Die Hauptschwierigkeit besteht darin, die äussere und innere Funktion zu bestimmen. Wir schreiben $f(x) = g(h(x))$:

a) $g(x) = \mathrm{e}^x$ und $h(x) = x^2$. $g'(x) = \mathrm{e}^x$ und $h'(x) = 2x$. Und damit $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \mathrm{e}^{x^2} \cdot 2x$.
b) $g(x) = x^2$, $h(x) = \mathrm{e}^x$, $g'(x) = 2x$, $h'(x) = \mathrm{e}^x$. Und damit $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = 2\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^{2x}$.
c) $g(x) = \ln(x)$, $h(x) = x^7$, $g'(x) = \frac{1}{x}$, $h'(x) = 7x^6$. Und damit $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{1}{x^7} \cdot 7x^6 = \frac{7}{x}$. Hätte man umgeformt als $f(x) = 7\ln(x)$ wäre die Sache etwas einfacher gewesen.
d) $g(x) = \ln(x)$, $h(x) = \mathrm{e}^x$, $g'(x) = \frac{1}{x}$, $h'(x) = \mathrm{e}^x$. Und damit $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x} \cdot \mathrm{e}^x = 1$. Hätte man umgeformt als $f(x) = x$ wäre die Sache sofort klar.
e) $f'(x) = g'(h(k(x))) \cdot (h(k(x)))' = g'(h(k(x))) \cdot h'(k(x)) \cdot k'(x)$
f) $g(x) = \mathrm{e}^x$, $h(x) = p\ln(x)$, $g'(x) = \mathrm{e}^x$, $h'(x) = \frac{p}{x}$ und damit $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \mathrm{e}^{p\ln(x)} \cdot \frac{p}{x}$.
g) $g(x) = x^4$, $h(x) = \ln(x)$, $g'(x) = 4x^3$, $h'(x) = \frac{1}{x}$ und damit $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = 4\left(\ln(x)\right)^3 \cdot \frac{1}{x}$
h) $f(x) = (k(x))^-1$. Äussere Funktion $g(x) = x^{-1}$, innere Funktion $h(x) = k(x)$, $g'(x) = -x^{-2}$, $h'(x) = k'(x)$ und damit $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = -(k(x))^{-2} \cdot k'(x) = -\frac{k'(x)}{(k(x))^2}$

Lösung zu Aufgabe 18.20 ex-produktregel-mit-linearer-approximation-herleiten

Es gilt $f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$ und $g(x+h) \approx g(x) + g'(x)h$. Das Produkt ist

$$p(x+h) = f(x+h) \cdot g(x+h) \approx (f(x) + f'(x)h) \cdot (g(x) + g'(x)h) = \\ f(x)g(x) + h(f(x)g'(x) + f'(x)g(x)) + h^2 f'(x)g'(x)$$

Der erste Teil ist $p(x)$, der zweite Teil ist eine lineare Approximation von p, also $p'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$. Der letzte Teil ist für sehr kleine h vernachlässigbar.

Lösung zu Aufgabe 18.21 ex-produktregel-anwenden

a) $f'(x) = \left(x^{42} \cdot \ln(x)\right)' = 42x^{41} \cdot \ln(x) + x^{42} \cdot \frac{1}{x} = x^{41} \cdot (1 + 42\ln(x))$
b) $f'(x) = \left(\sqrt{x} \cdot \mathrm{e}^x\right)' = \sqrt{x}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \cdot \frac{2x+1}{2\sqrt{x}}$
c) $f'(x) = \left(2^x \cdot x^{-2}\right)' = \ln(2) \cdot 2^x \cdot x^{-2} + 2^x \cdot (-2) \cdot x^{-3}$
d) $f'(x) = \left(x^5 \cdot x^4\right)' = 5x^4 \cdot x^4 + x^5 \cdot 4x^3 = 9x^8$ Hier hätte man besser zuerst umgeformt.

Lösung zu Aufgabe 18.23 ex-quotientenregel-anwenden

a) $f'(x) = \left(\frac{\ln(x)}{x^3}\right)' = \frac{\frac{1}{x} x^3 - \ln(x) \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{x^2 - 3x^2 \cdot \ln(x)}{x^6} = \frac{x^2(1 - 3\ln(x))}{x^6} = \frac{1 - 3\ln(x)}{x^4}$
b) $f'(x) = \left(\frac{x^5}{x^3}\right)' = \frac{5x^4 \cdot x^3 - x^5 \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{2x^7}{x^6} = 2x$ Zuerst vereinfachen wäre einfacher gewesen!

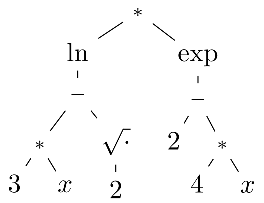
I. Blöchliger, S. Knaus, O. Schnürer

c) $f'(x) = \left(\frac{\log_2(x)}{2^x}\right)' = \frac{\frac{1}{\ln(2)x}\cdot 2^x - \log_2(x)\cdot\ln(2)\cdot 2^x}{(2^x)^2} = \frac{2^x\left(\frac{1}{\ln(2)x} - \frac{\ln(x)}{\ln(2)}\cdot\ln(2)\right)}{(2^x)^2} = \frac{\frac{1}{\ln(2)x} - \ln(x)}{2^x}$

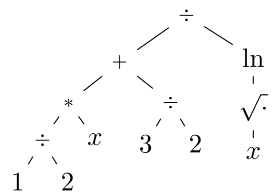
d) $f'(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\right)' = \frac{\mathrm{e}^x\cdot x^2 - \mathrm{e}^x\cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x\cdot\mathrm{e}^x(x-2)}{x^4} = \mathrm{e}^x\cdot\frac{x-2}{x^3}$

Lösung zu Aufgabe 18.24 ex-termbaueme-zeichnen

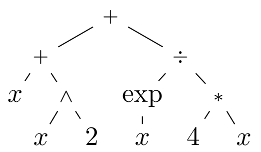
a) $\ln\left(3\cdot x - \sqrt{2}\right)\cdot \mathrm{e}^{2-4\cdot x}$



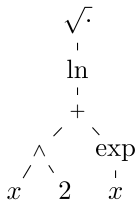
b) $\frac{\frac{1}{2}\cdot x + \frac{3}{2}}{\ln\left(\sqrt{x}\right)}$



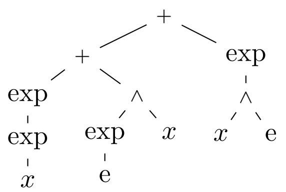
c) $x + x^2 + \frac{\mathrm{e}^x}{4\cdot x}$



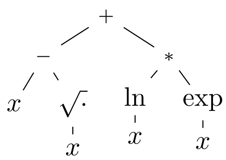
d) $\sqrt{\ln\left(x^2 + \mathrm{e}^x\right)}$



e) $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} + (\mathrm{e}^{\mathrm{e}})^x + \mathrm{e}^{x^{\mathrm{e}}}$



f) $x - \sqrt{x} + \ln(x)\cdot\mathrm{e}^x$



Lösung zu Aufgabe 18.25 ex-dem-teufel-ein-ohr-ableiten

a) Kettenregel. Äussere Funktion: e^x, innere Funktion $2x$. Also $\left(\mathrm{e}^{2x}\right)' = \mathrm{e}^{2x}\cdot 2$

b) Produktregel. $(x\cdot 2^x)' = 1\cdot 2^x + x\cdot\ln(2)\cdot 2^x = 2^x(1+\ln(2)x)$.

c) Quotientenregel. $\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$

d) $\left(\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x}}{\ln(4x)}\right)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}^x}}\cdot\mathrm{e}^x\cdot\ln(4x) - \sqrt{\mathrm{e}^x}\cdot\frac{1}{4x}\cdot 4}{(\ln(4x))^2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\mathrm{e}^x}\ln(4x) - \sqrt{\mathrm{e}^x}\cdot\frac{1}{x}}{(\ln(4x))^2}$

e) $\left(\ln\left(\sqrt{2^x}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{2^x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2^x}}\cdot\ln(2)\cdot 2^x = \frac{\ln(2)\cdot 2^x}{2\cdot 2^x} = \frac{\ln(2)}{2}$
Das könnte man auch billiger haben, indem man zuerst vereinfacht: $\ln\left(\sqrt{2^x}\right) = \ln\left(2^{\frac{x}{2}}\right) = \frac{x}{2}\cdot\ln(2) = x\cdot\frac{\ln(2)}{2}$.

f) $\left(\mathrm{e}^{x^2}\cdot\sqrt{x+\frac{1}{x}}\right)' = \mathrm{e}^{x^2}\cdot 2x\cdot\sqrt{x+\frac{1}{x}} + \mathrm{e}^{x^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+\frac{1}{x}}}\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

Lösung zu Aufgabe 18.26 ex-ableiten-bis-zum-abwinken

a) $f(x) = \frac{\sqrt{\mathrm{e}^{-x}\cdot\ln(x)}}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}^{-x}\cdot\ln(x)}}\cdot\left(-\mathrm{e}^{-x}\cdot\ln(x) + \mathrm{e}^{-x}\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot x^2 - \sqrt{\mathrm{e}^{-x}\cdot\ln(x)}\cdot 2x}{x^4}$$

b) $f(x)=\frac{\ln(x^2-1)}{x^4\cdot\log_7(42)}-2^{1-x^2}$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x^2-1}\cdot 2x\right)\cdot x^4\cdot\log_7(42)-\ln(x^2-1)\cdot\left(4x^3\cdot\log_7(42)\right)}{x^8\cdot\left(\log_7(42)\right)^2} - \ln(2)\cdot 2^{1-x^2}\cdot(-2)\cdot x$$

c) $f(x)=1+2x^3-\frac{4\cdot\ln(5x\cdot 6^x)}{\sqrt[7]{x^8\cdot\ln(9)}}$
Hier lohnt es sich, zuerst ein bisschen zu vereinfachen, nämlich
$\ln\left(5x\cdot 6^x\right)=\ln(5)+\ln(x)+x\ln(6)$ und
$\sqrt[7]{x^8\cdot\ln(9)}=x^{\frac{8}{7}}\cdot(\ln(9))^{\frac{1}{7}}$.
Wir leiten also $f(x)=1+2x^3-4\frac{\ln(5)+\ln(x)+x\ln(6)}{x^{\frac{8}{7}}\cdot(\ln(9))^{\frac{1}{7}}}$ ab:

$$f'(x) = 0+6x^2-4\frac{\left(\frac{1}{x}+\ln(6)\right)\cdot x^{\frac{8}{7}}\cdot(\ln(9))^{\frac{1}{7}}-(\ln(5)+\ln(x)+x\ln(6))\cdot\frac{8}{7}x^{\frac{1}{7}}\cdot(\ln(9))^{\frac{1}{7}}}{x^{\frac{16}{7}}\cdot(\ln(9))^{\frac{2}{7}}}$$

Lösung zu Aufgabe 18.27 ex-ableiten-mit-vereinfachen

a) $f(x)=\left(x^2-2x+2\right)\mathrm{e}^x$

$$f'(x) = (2x-2)\mathrm{e}^x+\left(x^2-2x+2\right)\mathrm{e}^x = x^2\mathrm{e}^x$$

b) $f(x)=-\frac{\ln(x)}{x}-\frac{1}{x}$

$$f'(x) = -\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln(x)\cdot 1}{x^2}-(-1)\cdot\frac{1}{x^2} = -\frac{1-\ln(x)}{x^2}+\frac{1}{x^2} = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

c) $f(x)=\frac{x^2+2x}{2}+2\ln(x-1)$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(2x+2)+2\frac{1}{x-1}\cdot 1 = x+1+\frac{2}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)+2}{x-1} = \frac{x^2+1}{x-1}$$

Lösung zu Aufgabe 18.28 ex-hunderste-ableitung

Man bildet die ersten Ableitungen, um eine Gesetzmässigkeit zu finden.
$f'(x)=2x\cdot\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x=(x^2+2x)\cdot\mathrm{e}^x$
$f''(x)=(2x+2)\mathrm{e}^x+(x^2+2x)\mathrm{e}^x=(x^2+4x+2)\mathrm{e}^x$
$f'''(x)=(2x+4)\mathrm{e}^x+(x^2+4x+2)\mathrm{e}^x=(x^2+6x+6)\mathrm{e}^x$
Man stellt fest, dass man immer ein Polynom zweiten Grades multipliziert mit e^x erhält. Etwas allgemeiner:
$(g(x)\cdot\mathrm{e}^x)'=g'(x)\mathrm{e}^x+g(x)\mathrm{e}^x=(g(x)+g'(x))\mathrm{e}^x$
Wenn $g(x)$ ein Polynom n-ten Grades ist, dann ist $g(x)+g'(x)$ wieder ein Polynom n-ten Grades. Der Koeffizient der höchsten Potenz von x ändert sich nicht.
Untersuchen wir den allgemeinen Fall mit $g(x)=x^2+ax+b$. Wir erhalten $g'(x)=2x+a$ und damit
$g(x)+g'(x)=x^2+(a+2)x+(a+b)$.
D.h. der Koeffizient von x wir immer um 2 grösser. Die Konstante wird immer um den Koeffizienten von x grösser.

Damit bilden die Koeffizienten von x eine arithmetische Folge mit $a_1 = 2$ und $d = 2$, die Konstanten eine arithmetische Reihe (mit erstem Glied 0 und $d = 2$).
Damit lassen sich die Koeffizienten des n-ten Polynoms angeben:
Koeffizient von x: $2n$
Konstante : $n \cdot \frac{a_1+a_n}{2} = n \cdot \frac{0+2(n-1)}{2} = n(n-1)$
und damit:

$$f^{(n)} = \left(x^2 + 2n \cdot x + n(n-1)\right) \mathrm{e}^x$$

$$f^{(100)} = \left(x^2 + 200x + 9900\right) \mathrm{e}^x$$

Lösung zu Aufgabe 18.29 ex-im-gradmass-ableiten
Der Betrag der Geschwindigkeit (d.h. Länge des Geschwindigkeitsvektors) ist nicht mehr 1 sondern $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$.
Für die Ableitungen heisst das

$$\sin(\alpha)' = \frac{\pi}{180} \cdot \cos(\alpha) \qquad \text{und}$$
$$\cos(\alpha)' = -\frac{\pi}{180} \cdot \sin(\alpha).$$

Darum ist das Bogenmass so viel eleganter.

Lösung zu Aufgabe 18.30 ex-tangens-ableiten
Für $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

Lösung zu Aufgabe 18.31 ex-beschleunigung-im-einheitskreis
$\vec{v}(t) = \left(\vec{OP}(t)\right)' = ((\cos(x))', (\sin(x))') = (-\sin(x), \cos(x))$.
$\vec{a}(t) = (\vec{v}(t))' = ((-\sin(x))', (\cos(x))') = (-\cos(x), -\sin(x)) = -\vec{OP}(t)$
Der Betrag (Länge) der Beschleunigung ist ebenfalls 1. Die Richtung ist entgegengesetzt der Richtung von $\vec{OP}$, was auch Sinn macht. Denn in diese Richtung wirkt die Zentripetalbeschleunigung. Oder man stellt sich den Punkt an einem im Kreiszentrum befestigten Faden vor.

Lösung zu Aufgabe 18.32 ex-ableiten-hardcore

a) $\left(\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{x^2+\ln(x)}\right)' = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\cdot(x^2+\ln(x)) - \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\cdot\left(2x+\frac{1}{x}\right)}{(x^2+\ln(x))^2}$

b) $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\right)' = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\cdot\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x+x}$

c) $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \left(\left(1+x^2\right)^{-1}\right)' = -\left(1+x^2\right)^{-2}\cdot(2x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

d) $(\sin(\cos(x)))' = \cos(\cos(x)) \cdot -\sin(x)$

e) $\left(\sqrt{1-(\sin(x))^2}\right)' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{1-(\sin(x))^2}}\cdot(-2)\sin(x)\cdot\cos(x) = -\frac{\sin(x)\cdot\cos(x)}{\sqrt{1-(\sin(x))^2}}$
Hinweis: $1-\sin(x)^2 = \cos(x)^2$, womit sich die Terme vereinfachen liessen. Allerdings ist $\sqrt{1-(\sin(x))^2} = |\cos(x)|$, weil die Wurzel immer positiv ist.

f) $(\cos(x)\cdot\tan(x))' = \left(\cos(x)\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = (\sin(x))' = \cos(x)$

g) $\left(\left(3x^3-x\right)^5\right)' = 5\left(3x^3-x\right)^4\cdot(9x^2-1)$

h) $\left(\left(\frac{7x-2}{\sqrt{x+2}}\right)^4\right)' = 4\left(\frac{7x-2}{\sqrt{x+2}}\right)^3\cdot\frac{7\cdot\sqrt{x+2}-(7x-2)\frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$

i) $\left(\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\right)' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{1+x}}$

Lösung zu Aufgabe 18.33 ex-formeln-ableiten

a) $F = m \cdot a$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}F = a.$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}F = m.$
Kraft ist Masse mal Beschleunigung. Die Kraft ist einfach proportional zu beiden Grössen.

b) $E = \frac{1}{2}m \cdot v^2$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}E = \frac{1}{2}v^2.$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}E = mv.$
Kinetische Energie ist proportional zur Masse. Ändert man die Geschwindigkeit, nimmt die Energie je schneller zu, je grösser die Geschwindigkeit. D.h. um z.B. die Geschwindigkeit um 10 km/h zu erhöhen, ist bei hohen Geschwindigkeiten viel mehr Energie nötig.

c) $y = a \cdot \sin(\omega t)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}y = \sin(\omega t)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}y = a\cos(\omega t) \cdot t$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y = a\cos(\omega t) \cdot \omega$
Harmonische Schwingung, y beschreibt die Position, damit ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y$ die Geschwindigkeit, die Proportional zur Amplitude a und der Winkelgeschwindigkeit ω ist.

d) $U = R \cdot I$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}U = I$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}I}U = R$
Spannung ist Widerstand mal Strom, proportional zu beiden Grössen.

e) $F_G = \gamma\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m_1}F_G = \gamma\frac{m_2}{r^2}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m_2}F_G = \gamma\frac{m_1}{r^2}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}F_G = -2 \cdot \gamma\frac{m_1 \cdot m_2}{r^3}$
Gravitationskraft zwischen zwei Massen.

f) $F_Z = \frac{m \cdot v^2}{r}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}F_Z = \frac{v^2}{r}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}F_Z = 2\frac{mv}{r}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}F_Z = -\frac{mv^2}{r^2}$
Zentripetalkraft bei einer Kreisbewegung aus Masse m, Geschwindigkeit v und Radius r. Aus der letzten Ableitung liest man (überhaupt nicht überraschend) ab, dass die Kraft kleiner wird, wenn der Radius vergrössert wird.

g) $F_Z = m \cdot r \cdot \omega^2$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}F_Z = r \cdot \omega^2$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}F_Z = m \cdot \omega^2$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F_Z = m \cdot r \cdot 2\omega$
Zentripetalkraft bei einer Kreisbewegung aus Masse m, Winkelgeschwindigkeit ω und Radius r.

h) $s = \frac{1}{2}a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} = \frac{1}{2} \cdot t^2$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v_0} = t$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_0} = 1$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = at + v0$
Gleichmässig beschleunigte Bewegung. Die Ableitung der Position s nach der Zeit t entspricht der Geschwindigkeit. Eine abermalige Ableitung nach t liefert die (in diesem Fall konstante) Beschleunigung.