



## 18 Differentialrechnung

Die *Differentialrechnung* als Teil der sogenannten *Analysis* beschäftigt sich mit der Berechnung lokaler Änderungs-raten von Funktionen. Konkret geht es um die Frage:

«Wenn sich das Argument einer Funktion leicht ändert, wie viel mal grösser ist die Änderung des Funktionswerts (im Vergleich zur Änderung des Arguments)?»

Oder salopp ausgedrückt:

«Wenn  $x$  wackelt, wie viel mal mehr wackelt  $f(x)$ ?»

Diese Änderungsrate ist selbst eine Funktion, die sogenannte **Ableitung** der Funktion. Für jeden  $x$ -Wert gibt die Ableitung an, wie stark sich die Funktion an dieser Stelle ändert.

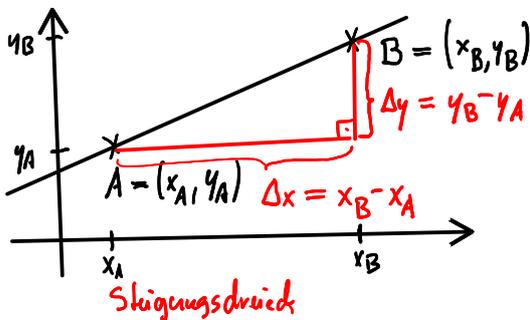
Wichtige Anwendungen sind z.B. die Bestimmung von lokalen Minima und Maxima einer Funktion (Optimierung), die Beschreibung physikalischer und technischer Abläufe und Computergrafik (z.B. Bézier-Kurven oder die Beschreibung von gekrümmten Flächen mit sogenannten Nurbs).

### Hinweise zu den «Beweisen»

Wir werden viele Dinge «beweisen». Diese «Beweise» genügen aber meistens nicht den Anforderungen an Präzision, die in der Mathematik üblich sind. Stattdessen werden «Beweise» gezeigt, die in den meisten Fällen auch eine Intuition für die Sachverhalte vermitteln.

### 18.1 Erinnerung: Steigung einer Geraden

Die Steigung einer Geraden in der  $x$ - $y$ -Ebene gibt an, um wie viel sich der  $y$ -Wert **pro** (also Division)  $x$ -Einheit verändert. Sie ist definiert als der Quotient der (vorzeichenbehafteten!) Differenz  $\Delta y$  («Delta  $y$ » zweier  $y$ -Werte) geteilt durch die Differenz  $\Delta x$  der entsprechenden  $x$ -Werte:



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

↑  
Steigung

diese Zahl hängt nicht von der Wahl der beiden Punkte A und B ab!

⚠  $\Delta y$  oder  $\Delta x$  können auch negativ sein

$m > 0$  Gerade steigt

$m < 0$  Gerade fällt

$m = 0$  Gerade horizontal

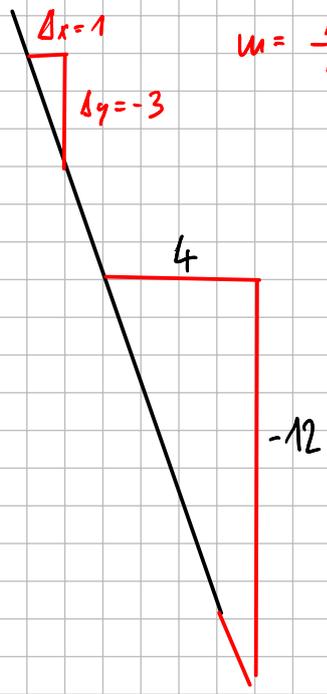
(B darf auch links liegen)

✂ **Aufgabe 18.1** Lassen Sie einen Stift auf dem Tisch rotieren. Wenn er zum Stillstand kommt, schätzen Sie möglichst schnell die Steigung der durch den Stift definierten Geraden ab. Legen Sie dazu zuerst sinnvolle Achsenrichtungen fest.

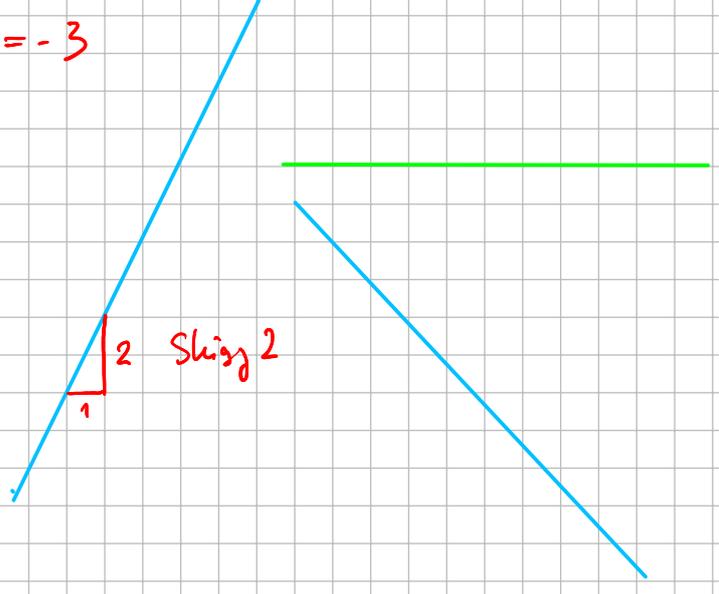
### 18.2 Lokale (oder momentane) Änderungsrate

Eine **Änderungsrate** gibt an, wie sich eine zeitabhängige Grösse während einer gewissen Zeitdauer ändert. Zum Beispiel ist die Änderungsrate der von einem Fahrzeug zurückgelegten Strecke die Geschwindigkeit; wenn man hier «unendliche kleine»/«infinitesimale» Zeitdauern betrachtet, spricht man von der momentanen oder lokalen Änderungsrate. Damit nähert sich die Durchschnittsgeschwindigkeit auf immer kleineren Zeitintervallen der Momentangeschwindigkeit.

Statt für die Änderungsrate der Strecke  $s$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  interessieren wir uns nun allgemeiner für die Änderungsrate einer Funktion  $f$  in Abhängigkeit vom Argument  $x$ . Auch diese kann angenähert werden, indem man  $f$  an zwei immer näher beieinander liegenden Stellen betrachtet und davon die Steigung der Sekante berechnet.



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{1} = -3$$





Anschauliche Definition der Ableitung

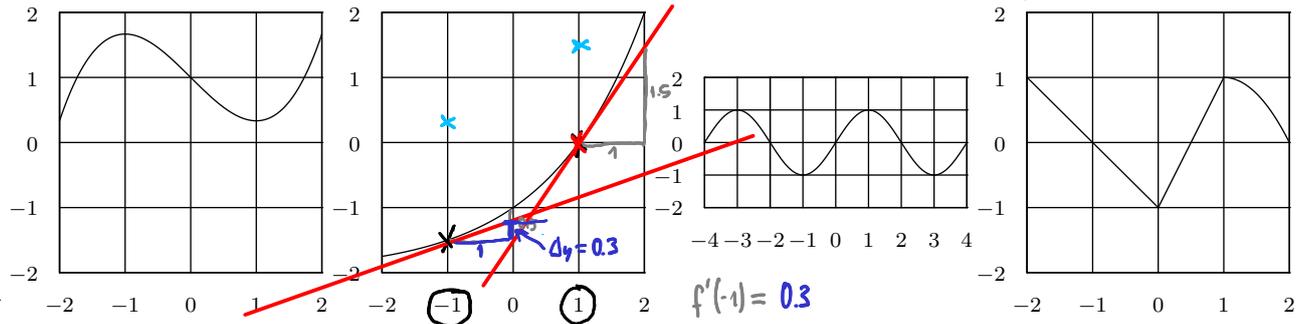
Merke 18.1 Ableitung einer Funktion

Die **Ableitung**  $f'(x)$  einer Funktion  $f$  an einer Stelle  $x$  ist die Steigung der Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(x, f(x))$ . Mit anderen Worten ist die Ableitung die lokale Änderungsrate von  $f$  an der Stelle  $x$ .

Die Zuordnung  $x \mapsto f'(x)$  ist wiederum eine Funktion. Sie heisst die **Ableitung von  $f$**  und wird als  $f'$  geschrieben. Sprechweise: « $f$  Strich».

$f'(1) = 1.5$  = Steigung der Tangenten an Graph(f) im Punkt  $(1, f(1))$

Aufgabe 18.2 Skizzieren Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:



HA auf Dienstag

**Beispiel:** Beschreibt die Funktion  $s(t)$  die Strecke als Funktion der Zeit (z.B.  $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$ ), ist deren Ableitung die entsprechende momentane Geschwindigkeit (also  $v(t) = at + v_0$ ). Die Änderung der Geschwindigkeit wäre dann die Beschleunigung (also  $a(t) = a$ , in diesem Fall konstant).

Merke 18.2 Ableitung als Grenzwert von Sekantensteigungen

Die **Ableitung**  $f'(x)$  einer Funktion  $f$  an einer Stelle  $x$  ist der folgende Limes (= Grenzwert) von Sekantensteigungen.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}$$

Sprechweise: «der Limes für  $h$  gegen Null von ...» bzw. «der Limes für  $u$  gegen  $x$  von ...»

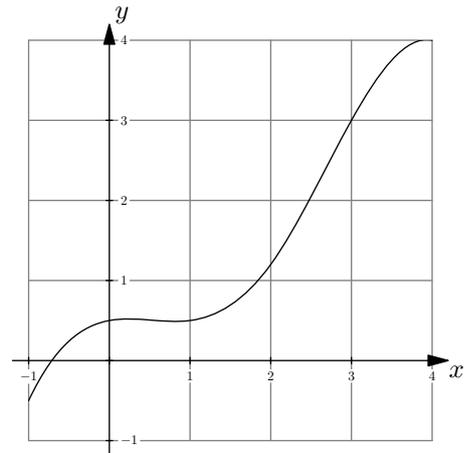
Die Quotienten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{und} \quad \frac{f(u) - f(x)}{u - x}$$

von Differenzen heisst **Differenzenquotienten**.

Der obige Limes von Differenzenquotienten heisst **Differentialquotient**.

Steigung der Sekanten



Geogebra:  $f(x) = x^3$   
 experimentell:  $f'(1) \approx 3,0$   $f'(-1) \approx 3,0$   
 $f'(2) \approx 12,0$   $f'(0) \approx 0$   
 $3 \cdot 2^2 = 12$

18.3 Ableitung von Potenzfunktionen

Aufgabe 18.3 Bestimmen Sie die Ableitung von  $f(x) = x^3$ , indem Sie ermitteln, wie sich der Differenzenquotient  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  für  $h$  gegen Null verhält.

Differenzenquotient  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \frac{h \cdot (3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$

Grenzwert:  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$   
 (auf  $h=0$  einsetzen)

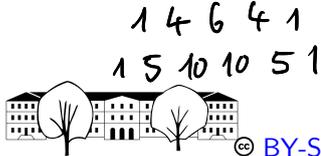
Kurzschreibweise:  $(x^3)' = 3x^2$   
 « die Ableitung von  $x^3$  ist  $3x^2$  »

Aufgabe 18.4 Leiten Sie  $f(x) = x^2$  ab (d. h. bestimmen Sie die Ableitung dieser Funktion). Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit dem früheren Resultat, dass die Tangente an die Normalparabel im Punkt  $(p, p^2)$  durch  $t(x) = 2px - p^2$  gegeben ist.

$$(x+h)^3 = 1x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + 1h^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

Pascalsches Dreieck





$n \in \mathbb{N}^+$

\* Aufgabe 18.5 Leiten Sie  $f(x) = x^n$  ab.

Differenzenquotient  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{x^n + \boxed{n} x^{n-1} h + \boxed{2} x^{n-2} h^2 + \dots + h^n - x^n}{h}$

Grenzwert:  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (nx^{n-1} + h \cdot (\dots)) = nx^{n-1}$

$= \frac{h(n x^{n-1} + ? x^{n-2} h + \dots + h^{n-1})}{h} = nx^{n-1} + h(\dots)$

Satz 1 Ableitung von Potenzfunktionen

Für beliebiges  $p \in \mathbb{N}^+$  gilt: Die Ableitung von  $f(x) = x^p$  ist  $f'(x) = px^{p-1}$ . In Kurzschreibweise:

$(x^p)' = px^{p-1}$

z.B.  $(x^{17})' = 17x^{16}$

Der obige Satz gilt auch für negative ganzzahlige Exponenten und kann ähnlich wie oben bewiesen werden.

$f(x) = x^{-1}$

Der obige Satz gilt sogar für reelle Exponenten. Der Beweis dafür wird später mit Hilfe der Exponentialfunktion mit Basis e (= Eulersche Zahl), dem natürlichen Logarithmus und der Kettenregel geführt.

\* Aufgabe 18.6 Was ist die Ableitung einer konstanten Funktion, wie z.B.  $f(x) = 1$ ? oder  $f(x) = 2024$

Der Graph ist seine eigene Tangente (in jedem Punkt) und hat Steigung Null.

$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2024 - 2024}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$  also  $f'(x) = 0$

18.4 Ableitungen von Vielfachen und Summen

Die Definition mit dem Grenzwert des Differenzenquotienten ist oft nicht praktikabel. Im Folgenden werden Regeln für das Ableiten hergeleitet, mit denen schliesslich beliebige Funktionen (zusammengesetzt aus Standard-Funktionen mit bekannter Ableitung) «einfach» abgeleitet werden können.

Was ist die Ableitung von  $3x^{17} + 7x^2$

18.4.1 Vielfaches einer Funktion

\* Aufgabe 18.7 Gegeben sei eine Funktion  $f(x)$  und deren Ableitung  $f'(x)$ . Für eine beliebige reelle Zahl  $a \in \mathbb{R}$  betrachte die Funktion  $g(x) = a \cdot f(x)$ . Beweisen Sie, dass  $g'(x) = a \cdot f'(x)$ . Der Beweis kann auf verschiedene Arten erfolgen. Einerseits algebraisch mit Hilfe des Differenzenquotienten, andererseits geometrisch.

$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{a f(x+h) - a f(x)}{h} = a \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} a \cdot f'(x)$ , also  $g'(x) = a f'(x)$

Kurz  $(a \cdot f(x))' = a f'(x)$   
 $(a \cdot f)' = a f'$

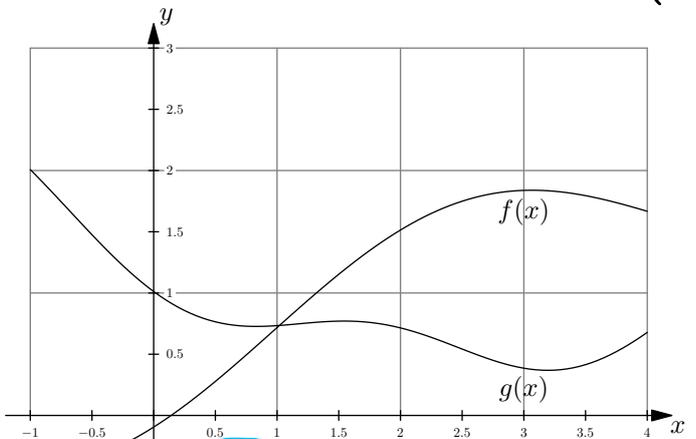
Anschauung siehe Tafel

z.B.  $f(x) = x^{17}$   
 $a = 3$   
 $g(x) = 3x^{17}$

18.4.2 Summe zweier Funktionen

\* Aufgabe 18.8 Gegeben sind zwei Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  und deren Ableitungen  $f'(x)$  und  $g'(x)$ . Daraus wird eine neue Funktion  $s(x) = f(x) + g(x)$  gebildet. Mit Hilfe des Differenzenquotienten kann man relativ einfach zeigen, dass  $s'(x) = f'(x) + g'(x)$ . Mehr Einsicht gewinnt man aber mit einem geometrischen Beweis. (?)

Skizzieren Sie  $s(x)$  und die Tangente an die Funktionen bei  $x_0 = 2$ . Zeichnen Sie Steigungsdreiecke mit gleichem  $\Delta x$  ein. Was ist die Steigung von  $h$  im Punkt  $x_0 = 2$ ?

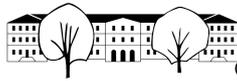


z.B.  
 $f(x) = x^3$   
 $g(x) = x^7$   
 $s(x) = f(x) + g(x)$

algebraischer Beweis:

$s'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = f'(x) + g'(x)$

$(f+g)' = f' + g'$



**Merke 18.3** Ableitung von Summen und Vielfachen

Die Ableitung der Summe von Funktionen ist die Summe der Ableitungen:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

oder kurz  $(f + g)' = f' + g'$

Die Ableitung eines (konstanten) Vielfachen einer Funktion ist das entsprechende Vielfache der Ableitung:

$$(a \cdot f(x))' = a f'(x)$$

oder kurz  $(a \cdot f)' = a \cdot f'$

für beliebiges  $a \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 18.9**

Leiten Sie mit Hilfe der bereits bekannten Ableitungsregeln nach  $x$  ab:

a)  $a(x) = x^{42}$

b)  $b(x) = 5x^4$

c)  $c(x) = x^3 + x^2$

d)  $d(x) = 7$

e)  $e(x) = x$

f)  $f(x) = x \cdot x$

g)  $g(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

h)  $h(x) = \frac{1}{x}$

h)  $f(x) = 3x + 7$

l)  $f(x) = mx + q$

i)  $f(x) = x^2(3x+2)$

j)  $f(x) = (x^3+7)^2$

unabhängig von  $h$

**18.5** Ableitung von Exponentialfunktionen

Im folgenden soll die Herleitung der Ableitung von Exponentialfunktionen skizziert werden. — d.h.  $a^x$   
Im ersten Schritt betrachten wir die konkrete Funktion  $f(x) = 2^x$  und untersuchen deren Ableitung mit Hilfe des Differenzenquotienten, um zu zeigen, dass die Ableitung bis auf eine multiplikative Konstante die Funktion selbst ist:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^{x+h} - 2^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2^x \frac{2^h - 1}{h} = 2^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^h - 2^0}{h}$$

D.h.: Wenn wir die Ableitung von  $f(x)$  an der Stelle Null kennen, kennen wir die Ableitung =  $2^x \cdot f'(0)$   
von  $f(x)$  an einer beliebigen Stelle  $x$ .

Die genau gleichen Umformungen sind gültig, wenn man die Basis 2 durch eine allgemeine Basis positive Basis  $a \neq 1$  ersetzt. Es gilt also für  $g(x) = a^x$ :

$$g'(x) = (a^x)' = a^x \cdot g'(0) \quad \text{wobei } g'(0) \in \mathbb{R}$$

Die Zahl  $g'(0)$  direkt als Grenzwert zu bestimmen, übersteigt hier unsere Möglichkeiten. Anstatt  $g'(0)$  für eine gegebene Basis  $a$  zu bestimmen, suchen wir eine Basis  $a$  so, dass  $g'(0) = 1$  gilt (d.h. die Ableitung bei 0 möglichst einfach ist). Dies bedeutet, dass die Ableitung der Exponentialfunktion mit dieser Basis die Funktion selbst ist.

Wir suchen  $a$  so, dass  $1 = g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - a^0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$

Für dieses  $a$  gilt dann nach  $(a^x)' = a^x$ , d.h.  $a^x$  ist ihre eigene Ableitung.

Listing 1: Python-Code zur Annäherung der speziellen Basis für Ableitung 1 bei  $x = 0$ .

```
1 from math import e
2 a_max = 3
3 a_min = 2
4 h = 1e-8
5 genauigkeit = 1e-3
6
7 def differenzenquotient(a):
8     return (a**h - 1) / h
9
10 while a_max - a_min > genauigkeit:
11     a = (a_max + a_min) / 2
12     if differenzenquotient(a) < 1:
13         a_min = a
14     else:
15         a_max = a
16     print(f"{a}")
17 print(f"{e}")
18 print(f"Fehler: {e - a}")
```

Experimentelle Bestimmung von  $a$ , so dass

$$1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} \quad \text{für ein sehr kleines } h, \text{ etwa } h = 10^{-6} = 0,000001$$

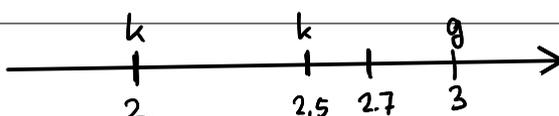
$a$	2	3	2.5	2.7
$\frac{a^h - 1}{h}$	0,6931...	1,0986...	0,9162...	
	zu klein	zu gross	zu klein	

Dieses Näherungsverfahren heisst Intervallschachtelung.

Ziel: Bestimme  $a$  auf 3

Nachkommastellen genau

Ergebnis ist  $a \approx 2,718$



Genauer Resultat (ohne Beweis):  $a = \text{Eulersche Zahl } e = 2,71828182 \dots$

**Merke 18.3** Ableitung von Summen und Vielfachen

Die Ableitung der Summe von Funktionen ist die Summe der Ableitungen:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad \text{oder kurz} \quad (f + g)' = f' + g'$$

Die Ableitung eines (konstanten) Vielfachen einer Funktion ist das entsprechende Vielfache der Ableitung:

$$(a \cdot f(x))' = a f'(x) \quad \text{oder kurz} \quad (a \cdot f)' = a \cdot f' \quad \text{für beliebiges } a \in \mathbb{R}.$$

✂ **Aufgabe 18.9** Leiten Sie mit Hilfe der bereits bekannten Ableitungsregeln nach  $x$  ab:

a)  $a(x) = x^{42}$

b)  $b(x) = 5x^4$

c)  $c(x) = x^3 + x^2$

d)  $d(x) = 7$

e)  $e(x) = x$

f)  $f(x) = x \cdot x$

g)  $g(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

h)  $h(x) = \frac{1}{x}$

## 18.5 Ableitung von Exponentialfunktionen

Im folgenden soll die Herleitung der Ableitung von Exponentialfunktionen skizziert werden.

Im ersten Schritt betrachten wir die konkrete Funktion  $f(x) = 2^x$  und untersuchen deren Ableitung mit Hilfe des Differenzenquotienten, um zu zeigen, dass die Ableitung bis auf eine multiplikative Konstante die Funktion selbst ist:



Die genau gleichen Umformungen sind gültig, wenn man die Basis 2 durch eine allgemeine Basis positive Basis  $a \neq 1$  ersetzt. Es gilt also für  $g(x) = a^x$ :

$$g'(x) = (a^x)' = a^x \cdot g'(0) \quad \text{wobei } g'(0) \in \mathbb{R}$$

Die Zahl  $g'(0)$  direkt als Grenzwert zu bestimmen, übersteigt hier unsere Möglichkeiten. Anstatt  $g'(0)$  für eine gegebene Basis  $a$  zu bestimmen, suchen wir eine Basis  $a$  so, dass  $g'(0) = 1$  gilt (d.h. die Ableitung bei 0 möglichst einfach ist). Dies bedeutet, dass die Ableitung der Exponentialfunktion mit dieser Basis die Funktion selbst ist.



Listing 1: Python-Code zur Annäherung der speziellen Basis für Ableitung 1 bei  $x = 0$ .

```

1 from math import e
2 a_max = 3
3 a_min = 2
4 h = 1e-8
5 genauigkeit = 1e-3
6
7 def differenzenquotient(a):
8     return (a**h - 1) / h
9
10 while a_max - a_min > genauigkeit:
11     a = (a_max + a_min) / 2
12     if differenzenquotient(a) < 1:
13         a_min = a
14     else:
15         a_max = a
16     print(f"{a}")
17 print(f"{e}")
18 print(f"Fehler: {e - a}")

```



**Definition 18.1** Eulersche Zahl  $e$  und  $\exp(x)$

Die **Eulersche Zahl**  $e$  ist definiert als

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \approx 2.718281828459045\dots$$

Sie ist eine der wichtigsten mathematischen Konstanten.

Der **natürliche Logarithmus**  $\ln$  ist der **Logarithmus zur Basis  $e$** .

Man definiert die Funktion  $\exp$  als:

$$\exp(x) := e^x$$

Die Funktion  $\exp(x) = e^x$  wird oft auch einfach als *die Exponentialfunktion* bezeichnet.

**Merke 18.4** Ableitung von  $f(x) = e^x = \exp(x)$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\exp(x))' = \exp(x)$$

$$\exp' = \exp$$

Die Ableitung der Exponentialfunktion mit Basis  $e$  ist die Funktion selbst.

Diese Eigenschaft mag erst mal als Kuriosität erscheinen, ist aber fundamental wichtig.

Soll ein Vorgang beschrieben werden, dessen Änderungsrate proportional zu seiner Grösse ist (z.B. ist am Anfang einer Epidemie die Zunahme der Ansteckungen proportional zur Anzahl der Infizierten sein), kann man zeigen, dass nur Exponentialfunktionen diese Eigenschaft haben.

**Merke 18.5**

Alle Funktionen feiern eine Party. Da kommt der Ableitungsoperator und schreit: «Ich leite Euch alle ab!». Alle Funktionen zittern vor Angst. Nur eine steht cool an der Bar und grinst: «Ich bin  $e^x$ !».

**Aufgabe 18.10** Leiten Sie  $f(x) = a^x$  ab, indem Sie die Funktion mit Basis  $e$  schreiben.

Wir wissen bereits (1)  $f'(x) = a^x \cdot f'(0)$  (siehe      auf Seite 4) (2)  $\exp'(0) = \exp(0) = e^0 = 1 = \exp'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - \exp(0)}{h}$

Zu bestimmen ist  $f'(0)$ .

$$f(x) = a^x = e^{x \ln(a)} = e^{x \ln(a)}$$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - a^0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h \ln(a)} - 1}{h}$$

Schreibe  $t = h \ln(a)$ , d.h.  $h = \frac{t}{\ln(a)}$ . Wenn  $t \rightarrow 0$ , dann auch  $h \rightarrow 0$  und umgekehrt.

$$f'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{\frac{t}{\ln(a)}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \ln(a) \cdot \frac{e^t - 1}{t} \right) = \ln(a) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = \ln(a) \cdot \exp'(0) = \ln(a)$$

$\ln(1)$  einsetzen:  $f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$ .

**Satz** **Merke 18.6**

Die Ableitung der Exponentialfunktion  $f(x) = a^x$  ist (für beliebiges  $a > 0$ )

$$f'(x) = (a^x)' = \ln(a) a^x.$$

Insbesondere gilt  $(e^x)' = e^x$ , da  $\ln(e) = 1$



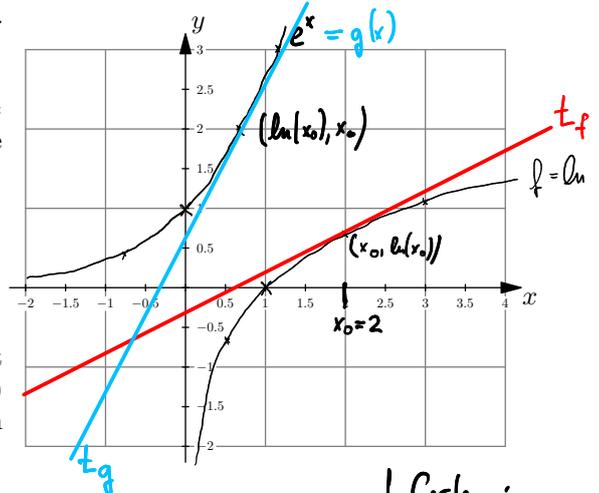
$\ln(1) = 0$        $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0,69$   
 $\ln(2) = 0,69\dots$        $= \ln(2)$   
 $\ln(3) = 1,09\dots$

### 18.6 Ableitung der Umkehrfunktion

Bestimmen Sie die Ableitung von  $f(x) = \ln(x)$  (Logarithmus zur Basis e). Gehen Sie wie folgt vor:

- a) Zeichnen Sie die Graphen von  $f(x) = \ln(x)$  und  $g(x) = e^x$  ins gleiche Koordinatensystem. Was ist der geometrische Zusammenhang dieser beiden Graphen?

Die Graphen dieser beiden Funktionen gehen durch Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden auseinander hervor. Diese Spiegelung vertauscht x und y.



$\ln'(x_0) = ?$   
 $\parallel$   
 Steigung von  $t_f$

- b) An der allgemeinen Stelle  $x_0$  soll die Ableitung bestimmt werden. Für  $x_0 = 2$  skizzieren Sie im Punkt  $(x_0, \ln(x_0))$  die Tangente  $t_f$  an  $f(x)$ . Skizzieren Sie die Tangente  $t_g$  im gespiegelten Punkt an  $g(x)$ .

- c) Bestimmen Sie die Tangentensteigung von  $t_g$  mit Hilfe der Ableitung von  $g(x)$ .

Die Steigung von  $t_g$  ist die Ableitung von  $g(x) = e^x$  an der Stelle  $\ln(x_0)$ .  
 $= g'(\ln(x_0)) = g(\ln(x_0)) = e^{\ln(x_0)} = x_0 (= 2)$

Gesucht:  
 $g'(x) = (e^x)' = e^x$   
 $\parallel$   
 $g(x)$

- d) Schliessen Sie daraus auf die Tangentensteigung von  $t_f$  und damit die Ableitungsfunktion von  $f(x) = \ln(x)$ .

Beim Spiegeln eines Steigungsdreiecks an der ersten Winkelhalbierenden werden  $\Delta x$  und  $\Delta y$  vertauscht. D. h. die Steigung von  $t_g$  ist der Kehrwert der Steigung von  $t_f$ .

Also  $\ln'(x_0) = \text{Steigung von } t_f = \frac{1}{\text{Steigung von } t_g} = \frac{1}{x_0}$

Diese Überlegungen gelten nicht nur für  $x_0 = 2$ , sondern für beliebiges  $x_0$ ,

d.h. allgemein gilt  $\ln'(x_0) = \frac{1}{x_0}$  bzw.  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

**Merke 18.7** Ableitung des natürlichen Logarithmus

Es gilt:

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

**Aufgabe 18.11** Mit Hilfe der Basiswechselformel leiten Sie  $f(x) = \log_b(x)$  für eine beliebige Basis in  $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  ab.

$(\log_b(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(b)}\right)' = \left(\frac{1}{\ln(b)} \cdot \ln(x)\right)' = \frac{1}{\ln(b)} (\ln(x))' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot \frac{1}{x}$   
 $\downarrow (af)' = af'$

**Merke 18.8** Ableitung einer beliebigen Logarithmusfunktion

Es gilt:

$(\log_b(x))' = \frac{1}{\ln(b) \cdot x}$

**Aufgabe 18.12** Analog zum Einführungsbeispiel mit der Ableitung des natürlichen Logarithmus, leiten Sie die Funktion  $f(x) = \sqrt{x}$  als Umkehrfunktion der Funktion  $g(x) = x^2$  ab.



$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

**Merke 18.9** Ableitung der Wurzelfunktion

Es gilt:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Beachten Sie, dass die Wurzelfunktion auch als Potenzfunktion mit  $p = \frac{1}{2}$  abgeleitet werden kann (Beweis für beliebige  $p$  später):  
 $(x^p)' = px^{p-1}$ .

Diese Methode kann auf beliebige Umkehrfunktionen verallgemeinert werden:

**Merke 18.10** Ableitung der Umkehrfunktion  $f^{-1}$  falls  $f'$  bekannt ist

Die Ableitung der Umkehrfunktion  $f^{-1}(x)$  ist

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

**18.7 Ableitung als Approximation**

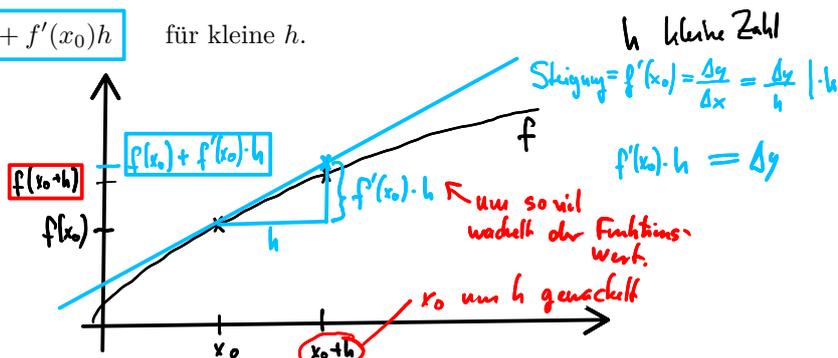
*Annäherung*

Die Tangente an den Graphen von  $f(x)$  in einem Punkt  $(x_0, f(x_0))$  ist die beste lineare Approximation an die Funktion. Insbesondere sind die beiden Graphen in einer kleinen Umgebung um den Punkt  $(x_0, f(x_0))$  kaum zu unterscheiden. Konkret:

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h \quad \text{für kleine } h.$$

Skizze:

Die Ableitung  $f'(x_0)$  ist der Proportionalitätsfaktor, der angibt, um wie viel und wie oft sich der Funktionswert ändert, wenn sich das Argument  $x_0$  ändert. Salopp:  
 « Wenn  $x_0$  wächst, dann wächst der Funktionswert  $f(x_0)$ -Wert so stark. »



Die lineare Approximation kann nun verwendet werden, um weitere Ableitungsregeln wie die Kettenregel einsichtig zu machen. Bewiesen wird die Kettenregel aber normalerweise über Grenzwerte von Differenzenquotienten, was zwar «wasserdicht» ist, aber kaum eine intuitive Einsicht fördert.

Um die Kettenregel zu verstehen, ist erst eine kurze Repetition nötig:

**Aufgabe 18.13** Gegeben sind die fünf Funktionen  $f(x) = x^5$ ,  $g(x) = 2^x$ ,  $h(x) = \ln(x)$ ,  $k(x) = \sqrt{x}$ . Bestimmen Sie folgende Ausdrücke:

- a)  $f(g(x)) = f(2^x) = (2^x)^5 = 2^{5x}$
- b)  $g(f(x))$
- c)  $f(k(x))$
- d)  $k(h(f(x)))$
- e)  $g(f(h(x)))$
- f)  $h(g(k(x)))$

**Aufgabe 18.14** Bestimmen Sie jeweils zwei nicht-triviale Funktionen  $g(x)$  und  $h(x)$  so, dass  $f(x) = g(h(x))$ .

- a)  $f(x) = \ln(x^5) = 5 \ln(x)$   
mit  $\alpha(x) = \ln(x)$  und  $\beta(x) = x^5$
- b)  $f(x) = \sqrt{4^x}$
- c)  $f(x) = 2^{x^2}$   
 $g(x) = x^2$   
 $h(x) = 2^x$
- d)  $f(x) = (2^x)^2$

$$g(h(x)) = g(2^x) = (2^x)^2 = 2^{2x}$$

$$f(x) = h(g(x)) = h(x^2) = 2^{x^2} \neq 2^{2x}$$



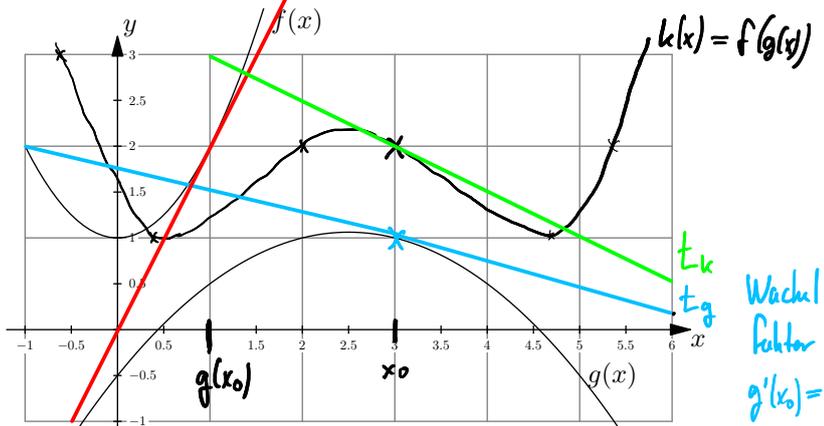
$$k(3) = f(g(3)) = f(1) = 2 \quad g(x) = g(3) = 1$$

$t_f$  Wackelfaktor  $f'(g(x_0)) = 2$

### 18.8 Kettenregel

**Aufgabe 18.15** Gegeben sind zwei Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$ . Daraus wird eine neue Funktion  $k(x) = f(g(x))$  gebildet.

- Skizzieren Sie  $k(x)$ .
- Skizzieren Sie die Tangente  $t_g$  im Punkt  $x_0 = 3$  an  $g$ , die Tangente  $t_f$  im Punkt  $g(x_0)$  an  $f$  und die Tangente  $t_k$  im Punkt  $x_0$ .
- Was ist der Zusammenhang dieser drei Steigungen?



Wackel-  
faktor  
 $g'(x_0) = -\frac{1}{4}$

Oder salopp ausgedrückt: «Wie fest wackeln die Funktionswerte, wenn  $x_0$  wackelt?».

Wenn  $x_0$  wackelt, wackelt  $g(x_0)$  um den Faktor  $g'(x_0)$ -Mal so stark. Der Funktionswert von  $f$  (an der Stelle  $g(x_0)$ ) wackelt um den Faktor  $f'(g(x_0))$ -Mal so stark wie  $g(x_0)$ . Also wackelt  $k(x_0) = f(g(x_0))$   $f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ -Mal so stark wie  $x_0$ .  $2 \cdot (-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{2}$

**Aufgabe 18.16** Gegeben sind zwei Funktionen  $f(x)$ ,  $g(x)$  und deren Ableitungen. Daraus wird die Funktion  $k(x) = f(g(x))$  definiert. Bestimmen Sie die Ableitung  $k'(x)$ . Schreiben Sie dazu  $f$ ,  $g$  und  $k$  als lineare Approximationen.

#### Merke 18.11 Kettenregel

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

oder kurz  $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$

$f$  wird äussere Funktion,  $g$  innere Funktion genannt.

Der Operator  $\circ$  bedeutet die Verknüpfung von Funktionen und  $f \circ g$  wird « $f$  nach  $g$ » gelesen.

$$(f(g(x)))'$$

**Aufgabe 18.17** Bestimmen Sie folgende Ableitungen. In einigen Fällen kann die Funktion nach Umformungen auch ohne Kettenregel abgeleitet werden.

- |                        |                          |                        |                            |
|------------------------|--------------------------|------------------------|----------------------------|
| a) $f(x) = e^{x^2}$    | b) $f(x) = (e^x)^2$      | c) $f(x) = \ln(x^7)$   | d) $f(x) = \ln(e^x)$       |
| e) $f(x) = g(h(k(x)))$ | f) $f(x) = e^{p \ln(x)}$ | g) $f(x) = (\ln(x))^4$ | h) $f(x) = \frac{1}{k(x)}$ |

Bekannt:  
 $(x^n)' = n x^{n-1}$   
für  $n \in \mathbb{N}^+$   
und  $n = -1$

**Aufgabe 18.18** Mit Hilfe der Kettenregel kann nun die Formel zur Ableitung von Potenzfunktionen  $f(x) = x^p$  für alle Exponenten  $p \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  bewiesen werden. Vorgehen: Schreiben Sie  $f(x)$  als Exponentialfunktion mit Basis  $e$ , wenden Sie ein Logarithmusgesetz an, leiten Sie ab und formen Sie wieder um.

$f(x) = x^p = e^{\ln(x^p)} = e^{p \ln(x)} = a(b(x))$  mit  $a(x) = e^x$  und  $b(x) = p \ln(x)$

Bekannt:  $a'(x) = e^x$  und  $b'(x) = p(\ln(x))' = p \cdot \frac{1}{x}$

$$f'(x) = a'(b(x)) \cdot b'(x) = e^{p \ln(x)} \cdot p \cdot \frac{1}{x} = x^p \cdot p \cdot \frac{1}{x} = p x^{p-1}$$

Beispiel:  $(x^p)' = p x^{p-1}$  für alle  $p \in \mathbb{R}$   
 $(\sqrt[3]{x^2})' = (x^{\frac{2}{3}})' = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3 \sqrt[3]{x}}$

### 18.9 Produktregel

Als «letzte» Regel leiten wir die Produktregel her. Diese Herleitung ist technisch und gibt Einblick in einen in der Mathematik «geläufigen Trick», wo zu Termen Null addiert wird (oder mit Eins multipliziert wird).

**Aufgabe 18.19** Gegeben sind zwei Funktionen  $f$  und  $g$  und deren Ableitungen. Zu bestimmen ist die Ableitung der Funktion  $k(x) = f(x) \cdot g(x)$ .



$k(x) = f(x) \cdot g(x)$  das Produkt von  $f$  und  $g$

$$\begin{aligned}
 k'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - \overbrace{f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h)}^0 - f(x) \cdot g(x)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x)) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot (g(x+h) - g(x))}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\rightarrow f'(x)} \cdot \underbrace{g(x+h)}_{\rightarrow g(x)} + f(x) \cdot \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\rightarrow g'(x)} \right) \\
 &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)
 \end{aligned}$$

**Merke 18.12** Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

oder kurz

$$(fg)' = f'g + fg'$$

**Aufgabe 18.20** Gegeben sind Funktionen  $f(x)$ ,  $g(x)$  und deren Ableitungen. Daraus wird die Funktion  $p(x) = f(x) \cdot g(x)$  definiert. Bestimmen Sie die Ableitung  $p'(x)$ , indem Sie  $p(x+h)$  mit Hilfe von  $f$  und  $g$  und deren linearen Approximationen im Punkt  $x_0$  schreiben. Aus dem Resultat kann die Ableitung von  $p$  abgelesen werden. Der Term in  $h^2$  ist für kleine  $h$  vernachlässigbar.

**Aufgabe 18.21** Leiten Sie ab:

a)  $f(x) = x^{42} \cdot \ln(x)$

b)  $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^x$

c)  $f(x) = 2^x \cdot x^{-2}$

d)  $f(x) = x^5 \cdot x^4$

**Aufgabe 18.22** Mit Hilfe der Produktregel und der Kettenregel leiten Sie die Quotientenregel her. Bestimmen Sie die Ableitung von  $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , wenn die Funktionen  $f$  und  $g$  und deren Ableitungen gegeben sind. Schreiben Sie dazu die Funktion als Produkt.

$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot g(x)^{-1} = f(x) \cdot a(g(x))$  wobei  $a(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$   
 $a'(x) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$$\begin{aligned}
 k'(x) &\stackrel{\text{Produkt-}}{\stackrel{\text{regel}}{=}} f'(x) a(g(x)) + f(x) \cdot (a(g(x)))' \\
 &\stackrel{\text{(Kettenregel)}}{=} f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) a'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x) \cdot \left(-\frac{1}{g(x)^2}\right) \cdot g'(x) \\
 &= \frac{f'(x)g(x)}{g(x)g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}
 \end{aligned}$$

**Merke 18.13** Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

oder kurz

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{(g)^2}$$

Bsp:  $f(x) = \frac{x^{42}}{\ln(x)} = \frac{a(x)}{b(x)} = x^{41}$

$$f'(x) = \frac{42x^{41} \cdot \ln(x) - \cancel{x^{42} \cdot \frac{1}{x}}}{\ln(x)^2} = \frac{a'b - ab'}{b^2}$$

$$= \frac{42x^{41}}{\ln(x)} - \frac{x^{41}}{\ln(x)^2} = \frac{x^{41}}{\ln(x)} \left( 42 - \frac{1}{\ln(x)} \right)$$

A21 + A23



✂ **Aufgabe 18.23** Leiten Sie ab und vereinfachen Sie:

a)  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^3}$       b)  $f(x) = \frac{x^5}{x^3}$       c)  $f(x) = \frac{\log_2(x)}{2^x}$       d)  $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

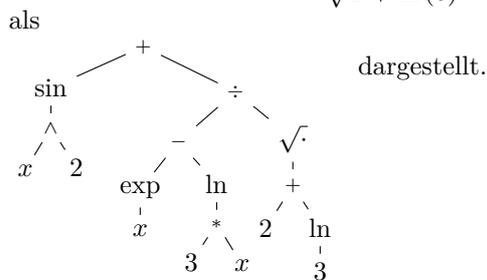
### 18.10 Termanalyse, Termbäume und Ableitungsregeln

Das Wichtigste beim Ableiten komplizierterer Funktionen ist zu erkennen, welche Regel angewendet werden soll. Hierfür ist es hilfreich, die Funktion als Baum darzustellen. Je nach Operation oder Funktion in der Wurzel und der Art der Unterbäume wird die entsprechende Regel angewandt und die Unterbäume abgeleitet. Zur Repetition: «Termanalyse, Kapitel 2.2, Seite 15».

Funktionen werden als Knoten mit nur einem Unterbaum dargestellt. Speziell wird die  $e^x$ -Funktion als «exp» notiert.

**Beispiel:**

Der Ausdruck  $\sin(x^2) + \frac{e^x - \ln(3 \cdot x)}{\sqrt{2 + \ln(3)}}$  wird



✂ **Aufgabe 18.24** Zeichnen Sie die entsprechenden Termbäume für folgende Ausdrücke ohne Vereinfachen.

a)  $\ln(3 \cdot x - \sqrt{2}) \cdot e^{2-4x}$       b)  $\frac{\frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2}}{\ln(\sqrt{x})}$       c)  $x + x^2 + \frac{e^x}{4 \cdot x}$   
 d)  $\sqrt{\ln(x^2 + e^x)}$       e)  $e^{e^x} + (e^e)^x + e^{x^e}$       f)  $x - \sqrt{x} + \ln(x) \cdot e^x$

### 18.11 Ableitungsregeln mit Bäumen

Im Folgenden steht  $A$  für beliebige Ausdrücke ohne  $x$ . Ausdrücke, bzw. Funktionsterme, die  $x$  enthalten, werden mit  $f$  und  $g$  geschrieben:

Regel	Funktionsterm	Ableitung	Algebraisch
Konstante	$A$	$0$	$(c)' = 0$
Konstanter Faktor	$A \cdot f$	$A \cdot f'$	$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
Kettenregel	$f \circ g$	$f' \circ g'$	$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Produktregel	$f \cdot g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$	$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

**Merke 18.14** Ableitungen einiger Grundfunktionen

$(x^p)' = px^{p-1}$        $(e^x)' = e^x$        $(a^x)' = \ln(a)a^x$        $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$        $(\log_a(x))' = \frac{1}{\ln(a)x}$

✂ **Aufgabe 18.25** Leiten Sie ab und vereinfachen Sie:

a)  $e^{2x}$       b)  $x \cdot 2^x$       c)  $\frac{\ln(x)}{x}$   
 d)  $\frac{\sqrt{e^x}}{\ln(4x)}$       e)  $\ln(\sqrt{2^x})$       f)  $e^{x^2} \cdot \sqrt{x + \frac{1}{x}}$



✂ **Aufgabe 18.26** Leiten Sie ab. Das Resultat braucht nicht vereinfacht zu werden.

a)  $f(x) = \frac{\sqrt{e^{-x} \cdot \ln(x)}}{x^2}$       b)  $f(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x^4 \cdot \log_7(42)} - 2^{1-x^2}$       c)  $f(x) = 1 + 2x^3 - \frac{4 \cdot \ln(5x \cdot 6^x)}{\sqrt[7]{x^8 \cdot \ln(9)}}$

✂ **Aufgabe 18.27** Leiten Sie ab und vereinfachen Sie (Resultat in c) als Bruch.

a)  $f(x) = (x^2 - 2x + 2) e^x$       b)  $f(x) = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$       c)  $f(x) = \frac{x^2+2x}{2} + 2 \ln(x-1)$

✂ **Aufgabe 18.28** Bestimmen Sie die hundertste Ableitung  $f^{(100)}$  von  $f(x) = x^2 \cdot e^x$ .

### 18.12 Ableitung der trigonometrischen Funktionen

In der Analysis werden wir fortan die **Winkel** immer im **Bogenmass** angeben. Das hat praktische Vorteile, wie gleich ersichtlich sein wird.

**Repetition Bogenmass:** Das Bogenmass eines Winkels ist die Länge des entsprechenden Bogens auf dem Einheitskreis. D.h.  $0^\circ$  bis  $360^\circ$  entspricht dann dem Bogenmass von 0 bis  $2\pi$ .

Gradmass	$0^\circ$	$30^\circ$		$60^\circ$				$270^\circ$	$360^\circ$
Bogenmass	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$	$\pi$			$2\pi$

#### 18.12.1 Gleichmässige Kreisbewegung

Wir betrachten einen Punkt  $P$ , der eine gleichförmige Kreisbewegung im positivem Umlaufsinn auf dem Einheitskreis mit Geschwindigkeit 1 und Startpunkt  $(1, 0)$  (zur Zeit  $t = 0$ ) ausführt. Wir notieren mit  $P(t)$  die Koordinaten vom Punkt  $P$  zum Zeitpunkt  $t$ .

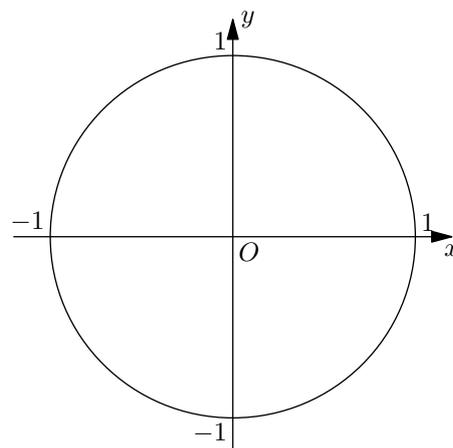
- Tragen Sie die Zeitpunkte im Einheitskreis (z.B. mit  $t = 0$ ) ein, zu denen sich der Punkt  $P$  auf den Achsen befindet.
- Tragen Sie in der Skizze den Punkt  $P(0.5)$  ein, also  $P$  zur Zeit  $t = \frac{1}{2}$ .
- Zum Zeitpunkt  $t$  hat  $P$  die Koordinaten  $P(t) = (x(t), y(t))$ , wobei  $x(t)$  und  $y(t)$  zwei Funktionen sind. Welche genau? Tragen Sie diese ebenfalls in der Skizze ein.
- Wie lang ist der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}(t)$ ?
- Was ist die Beziehung zwischen  $\vec{OP}(t)$  und  $\vec{v}(t)$ ?
- Zeichnen Sie  $\vec{v}(t)$  ein.
- Tragen Sie die Komponenten von  $\vec{v}(t)$  ein.
- In welche Richtung wirkt die Beschleunigung  $\vec{a}(t)$ ?

Die Komponenten von  $\vec{v}(t)$  entsprechen den Ableitungen der Koordinaten von  $P(t)$ .

**Merke 18.15** Ableitung von Cosinus und Sinus

Für  $x$  im Bogenmass gilt:

$(\sin(x))' =$                        $(\cos(x))' =$



✂ **Aufgabe 18.29** Wie gross ist die Geschwindigkeit der Kreisbewegung, wenn man den Winkel im Gradmass misst, d.h. eine Umdrehung erst nach  $t = 360$  vollendet ist? Was bedeutet das für die Ableitungen von  $\sin(\alpha)$  und  $\cos(\alpha)$  wenn  $\alpha$  im Gradmass gemessen wird?



✂ **Aufgabe 18.30** Leiten Sie  $\tan(x)$  ab. ( $x$  im Bogenmass).

✂ **Aufgabe 18.31** Sei  $P(t) = (\cos(t), \sin(t))$ . Bestimmen Sie den Beschleunigungsvektor  $\vec{a}(t)$ , indem Sie  $\vec{OP}(t)$  zwei mal ableiten. Wie gross ist der Betrag der Beschleunigung? Was ist die Richtung von  $\vec{a}(t)$  bezüglich  $\vec{OP}(t)$ ?



### 18.13 Lösungen

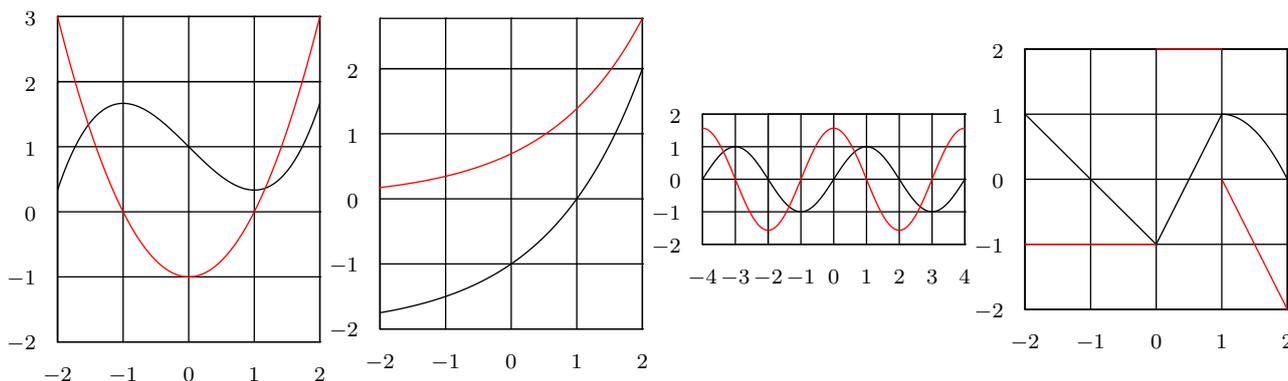
Hinweise zu den Symbolen:

✂ Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

✳ Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**

✂ Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

#### ✂ Lösung zu Aufgabe 18.2 ex-ableitungenskizzieren



#### ✂ Lösung zu Aufgabe 18.9 ex-polynome-und-potenzfunktionen-ableiten

- |                                   |   |
|-----------------------------------|---|
| a) $a'(x) = 42x^{41}$             | b) $b'(x) = 20x^3$                                |
| c) $c'(x) = 3x^2 + 2x$            | d) $d'(x) = 0$                                    |
| e) $e'(x) = 1$                    | f) $f'(x) = (x^2)' = 2x$                          |
| g) $g'(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x$ | h) $h'(x) = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ |

#### ✂ Lösung zu Aufgabe 18.12 ex-wurzel-ableiten

Gesucht ist die Tangentensteigung an den Graphen von  $f(x) = \sqrt{x}$ . Wir wählen einen Punkt  $(x_0, \sqrt{x_0})$  auf dem Graphen von  $f(x)$ . Der entsprechende Punkt auf  $g(x)$  hat die Koordinaten  $(\sqrt{x_0}, x_0)$ . Die Tangentensteigung in diesem Punkt erhalten wir durch die Ableitung von  $g'(x) = 2x$ , also  $g'(\sqrt{x_0}) = 2\sqrt{x_0}$ .

Der Kehrwert davon ist die Tangentensteigung an der Stelle  $x_0$ . Wir folgern

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

#### ✂ Lösung zu Aufgabe 18.13 ex-funktionen-verschachteln

- |                                   |                                  |                                     |
|-----------------------------------|----------------------------------|-------------------------------------|
| a) $f(g(x)) = (2^x)^5$            | b) $g(f(x)) = 2^{x^5}$           | c) $f(k(x)) = (\sqrt{x})^5$         |
| d) $k(h(f(x))) = \sqrt{\ln(x^5)}$ | e) $g(f(h(x))) = 2^{(\ln(x))^5}$ | f) $h(g(k(x))) = \ln(2^{\sqrt{x}})$ |

#### ✂ Lösung zu Aufgabe 18.14 ex-funktionen-entschachteln

- |  |  |
|--|--|
| a) $f(x) = \ln(x^5)$ $g(x) = \ln(x), h(x) = x^5$ | b) $f(x) = \sqrt{4^x}$ $g(x) = \sqrt{x}, h(x) = 4^x$ |
| c) $f(x) = 2^{x^2}$ $g(x) = 2^x, h(x) = x^2$     | d) $f(x) = (2^x)^2$ $g(x) = x^2, h(x) = 2^x$         |



✳️ **Lösung zu Aufgabe 18.16** ex-kettenregel-mit-linearer-approximation-herleiten

Es gilt  $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h$  und  $g(x_0 + h) \approx g(x_0) + g'(x_0)h$ . Es gilt also:

$$k(x_0 + h) = f(g(x_0 + h)) \approx f\left(g(x_0) + \underbrace{h \cdot g'(x_0)}_{h_2}\right) \approx f(g(x_0)) + h_2 f'(g(x_0)) = f(g(x_0)) + h \cdot g'(x_0) f'(g(x_0))$$

Der erste Term ist  $k(x_0)$ , der zweite ist also  $h \cdot k'(x_0)$ . Wir schliessen daraus

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Intuitiv kann man die Sache wie folgt verstehen: Das Argument in  $f$  ändert sich nicht mit Änderungsrate 1 (wie wenn dort nur  $x$  stehen würde) sondern mit Änderungsrate  $g'(x)$ . Darum wird die Änderungsrate noch damit multipliziert. Man spricht von der inneren Ableitung.

✳️ **Lösung zu Aufgabe 18.17** ex-kettenregel-anwenden

Die Hauptschwierigkeit besteht darin, die äussere und innere Funktion zu bestimmen. Wir schreiben  $f(x) = g(h(x))$ :

- $g(x) = e^x$  und  $h(x) = x^2$ .  $g'(x) = e^x$  und  $h'(x) = 2x$ . Und damit  $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = e^{x^2} \cdot 2x$ .
- $g(x) = x^2$ ,  $h(x) = e^x$ ,  $g'(x) = 2x$ ,  $h'(x) = e^x$ . Und damit  $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = 2e^x \cdot e^x = 2e^{2x}$ .
- $g(x) = \ln(x)$ ,  $h(x) = x^7$ ,  $g'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $h'(x) = 7x^6$ . Und damit  $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{1}{x^7} \cdot 7x^6 = \frac{7}{x}$ .  
Hätte man umgeformt als  $f(x) = 7 \ln(x)$  wäre die Sache etwas einfacher gewesen.
- $g(x) = \ln(x)$ ,  $h(x) = e^x$ ,  $g'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $h'(x) = e^x$ . Und damit  $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{1}{e^x} \cdot e^x = 1$ . Hätte man umgeformt als  $f(x) = x$  wäre die Sache sofort klar.
- $f'(x) = g'(h(k(x))) \cdot (h(k(x)))' = g'(h(k(x))) \cdot h'(k(x)) \cdot k'(x)$
- $g(x) = e^x$ ,  $h(x) = p \ln(x)$ ,  $g'(x) = e^x$ ,  $h'(x) = \frac{p}{x}$  und damit  $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = e^{p \ln(x)} \cdot \frac{p}{x}$ .
- $g(x) = x^4$ ,  $h(x) = \ln(x)$ ,  $g'(x) = 4x^3$ ,  $h'(x) = \frac{1}{x}$  und damit  $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = 4(\ln(x))^3 \cdot \frac{1}{x}$
- $f(x) = (k(x))^{-1}$ . Äussere Funktion  $g(x) = x^{-1}$ , innere Funktion  $h(x) = k(x)$ ,  $g'(x) = -x^{-2}$ ,  $h'(x) = k'(x)$  und damit  $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = -(k(x))^{-2} \cdot k'(x) = -\frac{k'(x)}{(k(x))^2}$

✳️ **Lösung zu Aufgabe 18.20** ex-produktregel-mit-linearer-approximation-herleiten

Es gilt  $f(x + h) \approx f(x) + f'(x)h$  und  $g(x + h) \approx g(x) + g'(x)h$ . Das Produkt ist

$$p(x + h) = f(x + h) \cdot g(x + h) \approx (f(x) + f'(x)h) \cdot (g(x) + g'(x)h) = f(x)g(x) + h(f(x)g'(x) + f'(x)g(x)) + h^2 f'(x)g'(x)$$

Der erste Teil ist  $p(x)$ , der zweite Teil ist eine lineare Approximation von  $p$ , also  $p'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$ . Der letzte Teil ist für sehr kleine  $h$  vernachlässigbar.

✳️ **Lösung zu Aufgabe 18.21** ex-produktregel-anwenden

- $f'(x) = (x^{42} \cdot \ln(x))' = 42x^{41} \cdot \ln(x) + x^{42} \cdot \frac{1}{x} = x^{41} \cdot (1 + 42 \ln(x))$
- $f'(x) = (\sqrt{x} \cdot e^x)' = \sqrt{x}e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^x = e^x \cdot \frac{2x+1}{2\sqrt{x}}$
- $f'(x) = (2^x \cdot x^{-2})' = \ln(2) \cdot 2^x \cdot x^{-2} + 2^x \cdot (-2) \cdot x^{-3}$
- $f'(x) = (x^5 \cdot x^4)' = 5x^4 \cdot x^4 + x^5 \cdot 4x^3 = 9x^8$  Hier hätte man besser zuerst umgeformt.

✳️ **Lösung zu Aufgabe 18.23** ex-quotientenregel-anwenden

- $f'(x) = \left(\frac{\ln(x)}{x^3}\right)' = \frac{\frac{1}{x}x^3 - \ln(x) \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{x^2 - 3x^2 \cdot \ln(x)}{x^6} = \frac{x^2(1 - 3 \ln(x))}{x^6} = \frac{1 - 3 \ln(x)}{x^4}$
- $f'(x) = \left(\frac{x^5}{x^3}\right)' = \frac{5x^4 \cdot x^3 - x^5 \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{2x^7}{x^6} = 2x$  Zuerst vereinfachen wäre einfacher gewesen!

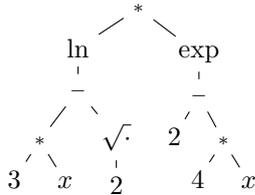


$$c) f'(x) = \left( \frac{\log_2(x)}{2^x} \right)' = \frac{\frac{1}{\ln(2)x} \cdot 2^x - \log_2(x) \cdot \ln(2) \cdot 2^x}{(2^x)^2} = \frac{2^x \left( \frac{1}{\ln(2)x} - \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \cdot \ln(2) \right)}{(2^x)^2} = \frac{\frac{1}{\ln(2)x} - \ln(x)}{2^x}$$

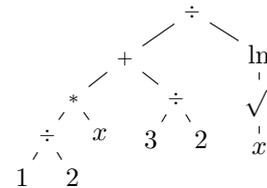
$$d) f'(x) = \left( \frac{e^x}{x^2} \right)' = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x \cdot e^x (x-2)}{x^4} = e^x \cdot \frac{x-2}{x^3}$$

✂ Lösung zu Aufgabe 18.24 ex-termbaueme-zeichnen

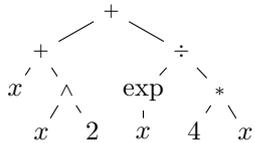
a)  $\ln(3 \cdot x - \sqrt{2}) \cdot e^{2-4 \cdot x}$



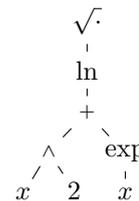
b)  $\frac{\frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2}}{\ln(\sqrt{x})}$



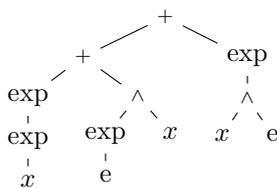
c)  $x + x^2 + \frac{e^x}{4 \cdot x}$



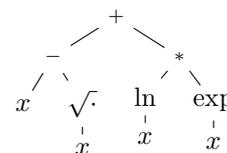
d)  $\sqrt{\ln(x^2 + e^x)}$



e)  $e^{e^x} + (e^e)^x + e^{x^e}$



f)  $x - \sqrt{x} + \ln(x) \cdot e^x$



✂ Lösung zu Aufgabe 18.25 ex-dem-teufel-ein-ohr-ableiten

a) Kettenregel. Äussere Funktion:  $e^x$ , innere Funktion  $2x$ . Also  $(e^{2x})' = e^{2x} \cdot 2$

b) Produktregel.  $(x \cdot 2^x)' = 1 \cdot 2^x + x \cdot \ln(2) \cdot 2^x = 2^x(1 + \ln(2)x)$ .

c) Quotientenregel.  $\left( \frac{\ln(x)}{x} \right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$

d)  $\left( \frac{\sqrt{e^x}}{\ln(4x)} \right)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{e^x}} \cdot e^x \cdot \ln(4x) - \sqrt{e^x} \cdot \frac{1}{4x} \cdot 4}{(\ln(4x))^2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{e^x} \ln(4x) - \sqrt{e^x} \cdot \frac{1}{x}}{(\ln(4x))^2}$

e)  $(\ln(\sqrt{2^x}))' = \frac{1}{\sqrt{2^x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2^x}} \cdot \ln(2) \cdot 2^x = \frac{\ln(2) \cdot 2^x}{2 \cdot 2^x} = \frac{\ln(2)}{2}$

Das könnte man auch billiger haben, indem man zuerst vereinfacht:  $\ln(\sqrt{2^x}) = \ln(2^{\frac{x}{2}}) = \frac{x}{2} \cdot \ln(2) = x \cdot \frac{\ln(2)}{2}$ .

f)  $\left( e^{x^2} \cdot \sqrt{x + \frac{1}{x}} \right)' = e^{x^2} \cdot 2x \cdot \sqrt{x + \frac{1}{x}} + e^{x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x + \frac{1}{x}}} \cdot \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right)$

✂ Lösung zu Aufgabe 18.26 ex-ableiten-bis-zum-abwinken

a)  $f(x) = \frac{\sqrt{e^{-x} \cdot \ln(x)}}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{e^{-x} \cdot \ln(x)}} \cdot (-e^{-x} \cdot \ln(x) + e^{-x} \cdot \frac{1}{x}) \cdot x^2 - \sqrt{e^{-x} \cdot \ln(x)} \cdot 2x}{x^4}$$



$$b) f(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x^4 \cdot \log_7(42)} - 2^{1-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x^2-1} \cdot 2x\right) \cdot x^4 \cdot \log_7(42) - \ln(x^2-1) \cdot (4x^3 \cdot \log_7(42))}{x^8 \cdot (\log_7(42))^2} - \ln(2) \cdot 2^{1-x^2} \cdot (-2) \cdot x$$

$$c) f(x) = 1 + 2x^3 - \frac{4 \cdot \ln(5x \cdot 6^x)}{\sqrt[7]{x^8 \cdot \ln(9)}}$$

Hier lohnt es sich, zuerst ein bisschen zu vereinfachen, nämlich

$$\ln(5x \cdot 6^x) = \ln(5) + \ln(x) + x \ln(6) \text{ und}$$

$$\sqrt[7]{x^8 \cdot \ln(9)} = x^{\frac{8}{7}} \cdot (\ln(9))^{\frac{1}{7}}.$$

Wir leiten also  $f(x) = 1 + 2x^3 - 4 \frac{\ln(5) + \ln(x) + x \ln(6)}{x^{\frac{8}{7}} \cdot (\ln(9))^{\frac{1}{7}}}$  ab:

$$f'(x) = 0 + 6x^2 - 4 \frac{\left(\frac{1}{x} + \ln(6)\right) \cdot x^{\frac{8}{7}} \cdot (\ln(9))^{\frac{1}{7}} - (\ln(5) + \ln(x) + x \ln(6)) \cdot \frac{8}{7} x^{\frac{1}{7}} \cdot (\ln(9))^{\frac{1}{7}}}{x^{\frac{16}{7}} \cdot (\ln(9))^{\frac{2}{7}}}$$

### ✂ Lösung zu Aufgabe 18.27 ex-ableiten-mit-vereinfachen

$$a) f(x) = (x^2 - 2x + 2) e^x$$

$$f'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 2)e^x = x^2 e^x$$

$$b) f(x) = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} - (-1) \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{1 - \ln(x)}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$c) f(x) = \frac{x^2+2x}{2} + 2 \ln(x-1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(2x+2) + 2 \frac{1}{x-1} \cdot 1 = x+1 + \frac{2}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)+2}{x-1} = \frac{x^2+1}{x-1}$$

### ✂ Lösung zu Aufgabe 18.28 ex-hunderste-ableitung

Man bildet die ersten Ableitungen, um eine Gesetzmässigkeit zu finden.

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 e^x = (x^2 + 2x) \cdot e^x$$

$$f''(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x)e^x = (x^2+4x+2)e^x$$

$$f'''(x) = (2x+4)e^x + (x^2+4x+2)e^x = (x^2+6x+6)e^x$$

Man stellt fest, dass man immer ein Polynom zweiten Grades multipliziert mit  $e^x$  erhält. Etwas allgemeiner:

$$(g(x) \cdot e^x)' = g'(x)e^x + g(x)e^x = (g(x) + g'(x))e^x$$

Wenn  $g(x)$  ein Polynom  $n$ -ten Grades ist, dann ist  $g(x) + g'(x)$  wieder ein Polynom  $n$ -ten Grades. Der Koeffizient der höchsten Potenz von  $x$  ändert sich nicht.

Untersuchen wir den allgemeinen Fall mit  $g(x) = x^2 + ax + b$ . Wir erhalten  $g'(x) = 2x + a$  und damit

$$g(x) + g'(x) = x^2 + (a+2)x + (a+b).$$

D.h. der Koeffizient von  $x$  wird immer um 2 grösser. Die Konstante wird immer um den Koeffizienten von  $x$  grösser.



Damit bilden die Koeffizienten von  $x$  eine arithmetische Folge mit  $a_1 = 2$  und  $d = 2$ , die Konstanten eine arithmetische Reihe (mit erstem Glied 0 und  $d = 2$ ).

Damit lassen sich die Koeffizienten des  $n$ -ten Polynoms angeben:

Koeffizient von  $x$ :  $2n$

Konstante :  $n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{0 + 2(n-1)}{2} = n(n-1)$

und damit:

$$f^{(n)} = (x^2 + 2n \cdot x + n(n-1)) e^x$$

$$f^{(100)} = (x^2 + 200x + 9900) e^x$$

### ✂ Lösung zu Aufgabe 18.29 ex-im-gradmass-ableiten

Der Betrag der Geschwindigkeit (d.h. Länge des Geschwindigkeitsvektors) ist nicht mehr 1 sondern  $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$ . Für die Ableitungen heisst das

$$\begin{aligned} \sin(\alpha)' &= \frac{\pi}{180} \cdot \cos(\alpha) & \text{und} \\ \cos(\alpha)' &= -\frac{\pi}{180} \cdot \sin(\alpha). \end{aligned}$$

Darum ist das Bogenmass so viel eleganter.

### ✂ Lösung zu Aufgabe 18.30 ex-tangens-ableiten

Für  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$(\tan(x))' = \left( \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \sin(x)}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

### ✂ Lösung zu Aufgabe 18.31 ex-beschleunigung-im-einheitskreis

$$\vec{v}(t) = \left( \vec{OP}(t) \right)' = ((\cos(x))', (\sin(x))') = (-\sin(x), \cos(x)).$$

$$\vec{a}(t) = (\vec{v}(t))' = ((-\sin(x))', (\cos(x))') = (-\cos(x), -\sin(x)) = -\vec{OP}(t)$$

Der Betrag (Länge) der Beschleunigung ist ebenfalls 1. Die Richtung ist entgegengesetzt der Richtung von  $\vec{OP}$ , was auch Sinn macht. Denn in diese Richtung wirkt die Zentripetalbeschleunigung. Oder man stellt sich den Punkt an einem im Kreiszentrum befestigten Faden vor.