19 Differentialrechnung

Die *Differentialrechnung* als Teil der sogenannten *Analysis* beschäftigt sich mit der Berechnung lokaler Änderungsraten von Funktionen. Konkret geht es um die Frage:

> «Wenn sich das Argument einer Funktion leicht ändert, wie viel mal grösser ist die Änderung des Funktionswerts (im Vergleich zur Änderung des Arguments)?»

Oder salopp ausgedrückt:

> «Wenn x wackelt, wie viel mal mehr wackelt $f(x)$?»

Diese Änderungsrate ist selbst eine Funktion, die sogenannte **Ableitung** der Funktion. Für jeden x-Wert gibt die Ableitung an, wie stark sich die Funktion an dieser Stelle ändert.

Wichtige Anwendungen sind z.B. die Bestimmung von lokalen Minima und Maxima einer Funktion (Optimierung), die Beschreibung physikalischer und technischer Abläufe und Computergrafik (z.B. Bézier-Kurven oder die Beschreibung von gekrümmten Flächen mit sogenannten Nurbs).

Hinweise zu den «Beweisen»

Wir werden viele Dinge «beweisen». Diese «Beweise» genügen aber meistens nicht den Anforderungen an Präzision, die in der Mathematik üblich sind. Stattdessen werden «Beweise» gezeigt, die in den meisten Fällen auch eine Intuition für die Sachverhalte vermitteln.

19.1 Erinnerung: Steigung einer Geraden

Die Steigung einer Geraden in der x-y-Ebene gibt an, um wie viel sich der y-Wert **pro** (also Division) x-Einheit verändert. Sie ist definiert als der Quotient der (vorzeichenbehafteten!) Differenz Δy («Delta y» zweier y-Werte) geteilt durch die Differenz Δx der entsprechenden x-Werte:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Aufgabe 19.1 Lassen Sie einen Stift auf dem Tisch rotieren. Wenn er zum Stillstand kommt, schätzen Sie möglichst schnell die Steigung der durch den Stift definierten Geraden ab. Legen Sie dazu zuerst sinnvolle Achsenrichtungen fest.

19.2 Lokale (oder momentane) Änderungsrate

Eine **Änderungsrate** gibt an, wie sich eine zeitabhängige Grösse während einer gewissen Zeitdauer ändert. Zum Beispiel ist die Änderungsrate der von einem Fahrzeug zurückgelegten Strecke die Geschwindigkeit; wenn man hier «unendliche kleine»/«infinitesimale» Zeitdauern betrachtet, spricht man von der momentanen oder lokalen Änderungsrate. Damit nähert sich die Durchschnittsgeschwindigkeit auf immer kleineren Zeitintervallen der Momentangeschwindigkeit.

Statt für die Änderungsrate der Strecke s in Abhängigkeit von der Zeit t interessieren wir uns nun allgemeiner für die Änderungsrate einer Funktion f in Abhängigkeit vom Argument x. Auch diese kann angenähert werden, indem man f an zwei immer näher beieinander liegenden Stellen betrachtet und davon die Steigung der Sekante berechnet.