I. Blöchliger, S. Knaus, O. Schnürer

Merke 19.9 Ableitung der Wurzelfunktion

Es gilt:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}.$$

Beachten Sie, dass die Wurzelfunktion auch als Potenzfunktion mit $p=\frac{1}{2}$ abgeleitet werden kann (Beweis für beliebige p später):
$(x^p)' = px^{p-1}$.

Diese Methode kann auf beliebige Umkehrfunktionen verallgemeinert werden:

Merke 19.10 Ableitung der Umkehrfunktion

Die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ ist

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

19.7 Ableitung als Approximation

Die Tangente an den Graphen von $f(x)$ in einem Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist die beste lineare Approximation an die Funktion. Insbesondere sind die beiden Graphen in einer kleinen Umgebung um den Punkt $(x_0, f(x_0))$ kaum zu unterscheiden. Konkret:

$$f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h \qquad \text{für kleine } h.$$

Skizze:
✎

Die lineare Approximation kann nun verwendet werden, um weitere Ableitungsregeln wie die Kettenregel einsichtig zu machen. Bewiesen wird die Kettenregel aber normalerweise über Grenzwerte von Differenzenquotienten, was zwar «wasserdicht» ist, aber kaum eine intuitive Einsicht fördert.

Um die Kettenregel zu verstehen, ist erst eine kurze Repetition nötig:

Aufgabe 19.13 Gegeben sind die fünf Funktionen $f(x)=x^5$, $g(x)=2^x$, $h(x)=\ln(x)$, $k(x)=\sqrt{x}$. Bestimmen Sie folgende Ausdrücke:

a) $f(g(x))$
b) $g(f(x))$
c) $f(k(x))$
d) $k(h(f(x)))$
e) $g(f(h(x)))$
f) $h(g(k(x)))$

Aufgabe 19.14 Bestimmen Sie jeweils zwei nicht-triviale Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ so, dass $f(x) = g(h(x))$.

a) $f(x) = \ln\left(x^5\right)$
b) $f(x) = \sqrt{4^x}$
c) $f(x) = 2^{x^2}$
d) $f(x) = (2^x)^2$