18.5 Logarithmusgesetze

Aus früheren Lektionen kennen Sie die Potenzgesetze:

Merke 18.7 Potenzgesetze

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \quad \text{und} \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \quad \text{für } a \neq 0$$

$$a^r \cdot b^r = (ab)^r \quad \text{und} \quad \frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r \quad \text{für } b \neq 0$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

Diese Gesetze haben auch «logarithmische Geschwister»: Jedes dieser Gesetze lässt sich mit dem Logarithmus (zu einer beliebigen Basis) ausdrücken.

Aufgabe 18.19 Richtig oder falsch? Finden Sie Gegenbeispiele oder gute Argumente für die Richtigkeit:

a) $\log_b(x+y) = \log_b(x) + \log_b(y)$

b) $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) \cdot \log_b(y)$

c) $\log_b(x-y) = \log_b(x) - \log_b(y)$

d) $\log_b\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{\log_b(x)}$

e) $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$

f) $\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\log_b(x)}$

g) $\log_b\left(x^y\right) = \left(\log_b(x)\right)^y$

h) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$

i) $\log_{\frac{1}{b}}(x) = -\log_b(x)$

j) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(y)}$

Aufgabe 18.20 Beweisen Sie, dass $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$ (für $b, x, y \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 1$).
Vorgehen: Schreiben Sie x und y als Potenz von b und setzen Sie ein. Welches Potenzgesetze verwenden Sie

✎

Aufgabe 18.21 Beweisen Sie, dass $\log_b\left(x^y\right) = y \cdot \log_b(x)$ (für $b, x \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 1$, $y \in \mathbb{R}$).
Vorgehen: Schreiben Sie x als Potenz von b und setzen Sie ein. Welches Potenzgesetze verwenden Sie?

✎

Aufgabe 18.22 Zeigen Sie mit den beiden vorherigen Gesetzen, dass auch Folgendes gilt:

a) $\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_b(x)$ b) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$

✎

Aufgabe 18.23 Beweisen Sie den **Basiswechsel** für Logarithmen: $\log_b(x) = \frac{\log_c(x)}{\log_c(b)}$.
Vorgehen: Schreiben Sie x als Potenz von b und berechnen Sie $\log_c(x)$. Lösen Sie dann nach $\log_b(x)$ auf.