c) Die x-Koordinate wird in jedem zweiten Schritt um die Differenz der Radien angepasst:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 = 0 \\ x_3 &= x_4 = x_2 + (r_3 - r_2) \\ x_5 &= x_6 = x_4 - (r_5 - r_4) \\ x_7 &= x_8 = x_6 + (r_7 - r_6) \\ \ldots &= \ldots \\ x_{19} &= x_{20} = x_{18} + (r_{19} - r_{18}) \end{aligned}$$

Die Differenzen (r_3-r_2), $-(r_5-r_4)$, $+(r_7-r_6)$, $\ldots$ bilden ebenfalls eine geometrische Folge mit $q = -\left(\frac{5}{4}\right)^2$. Die x-Koordinate x_{20} ist also die Summe dieser Differenzen:

$$x_{20} = \sum_{i=1}^{9} (-1)^{(i+1)} \cdot (r_{2i+1} - r_{2i}) = \sum_{i=1}^{9} (r_3 - r_2) \cdot \left(-\left(\frac{5}{4}\right)^2\right)^{i-1} = (r_3 - r_2) \cdot \frac{\left(-\left(\frac{5}{4}\right)^2\right)^9 - 1}{-\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1} \approx 6.892$$

Lösung zu Aufgabe 18.37 ex-logy-speicherpreise

(1) Nehmen wir an, y_1 sei der Preis von Flash-Speicher. Sei dann $\tilde{y}_1 = \ln y_1$. Weil nun $\tilde{y}_1 = mx + q_1$ gilt, muss also gelten, dass $y_1 = e^{\tilde{y}_1} = e^{mx+q_1} = \underbrace{(e^m)}_{=q}{}^x \cdot \underbrace{e^{q_1}}_{=B_0} = q^x \cdot B_0$. Das heisst, der Preis in USD pro Megabyte ist ungefähr ein logarithmischer Zerfall.

(2) Sei wieder y_1 der Preis von Flash-Speicher und y_2 der Preis von herkömmlichen Festplatten. Wiederum ist $\tilde{y}_1 = \ln y_1$ und $\tilde{y}_2 = \ln y_2$ Weil sie nun parallel verlaufen, gilt, dass $\tilde{y}_1 = mx + q_1$ und $\tilde{y}_2 = mx + q_2$ resp. $y_1 = e^{mx+q_1}$ und $y_2 = e^{mx+q_2}$. Betrachtet man nun den Quotienten von y_1 und y_2,

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{mx+q_1}}{e^{mx+q_2}} = \frac{e^{mx}e^{q_1}}{e^{mx}e^{q_2}} = \frac{e^{q_1}}{e^{q_2}} = e^{q_1-q_2}.$$

Das heist, der Quotient ist konstant, damit ist auch der prozentuale Unterscheid konstant. In anderen Worten: Flash Speicher kosteten immer x% mehr als herkömmliche Festplatten pro Megabyte.

Lösung zu Aufgabe 18.41 ex-rule-of-72

Logarithmiert man die Gleichung $(1+i)^x = 2$ auf beiden Seiten erhält man $x \ln(1+i) = \ln(2)$. Da nun $\ln(1+i) \approx i$ ist, folgt, dass $x \cdot i \approx \ln(2)$ ist. Weil $\ln(2) \approx 0.693$. Die Lösung der Gleichung $i \cdot x \approx 0.693$ ist also $x \approx \frac{0.693}{i}$. Ist nun i in Prozent möchte man also eine Zahl mit möglichst vielen Teilern in der Nähe von $69.3 = 100 \cdot 0.693$. Weil $72 = 2^3 \cdot 3^2$ ist, folgt also, dass 72 eine gute Wahl ist und man die Verdoppelungszeit approximativ mit $\frac{72}{i\%}$ berechnen kann.