# 18 Exponentialfunktionen und Logarithmen

Viele natürliche Prozesse können durch Exponentialfunktionen modelliert werden, z.B. der *radioaktive Zerfall* oder der *Ausbruch von Epidemien*.
Der natürliche Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion und findet Anwendungen z.B. in der Chemie mit der Angabe des *pH-Werts* oder bei Massangaben von z.B. *Schallstärke* oder *Erdbebenintensität*.

## 18.1 Exponentialfunktionen

**Definition 18.1** Exponentialfunktion

Für jede **Basis** $a \in \mathbb{R}^+$ ist die zugehörige **Exponentialfunktion** gegeben durch

$$f(x) = a^x$$

Beachten Sie, dass das Argument $x$ im Exponenten steht (im Gegensatz dazu wird bei Potenzfunktionen $g(x) = x^e$ das Argument potenziert).

Man kann Exponentialfunktionen als Verallgemeinerung von geometrischen Folgen mit Startwert $g_0 = 1$ und Wachstumsfaktor (Quotient) $q = a$ betrachten. Es gilt dann:

$$g_n = g_0 \cdot q^n = 1 \cdot a^n = a^n = f(n)$$

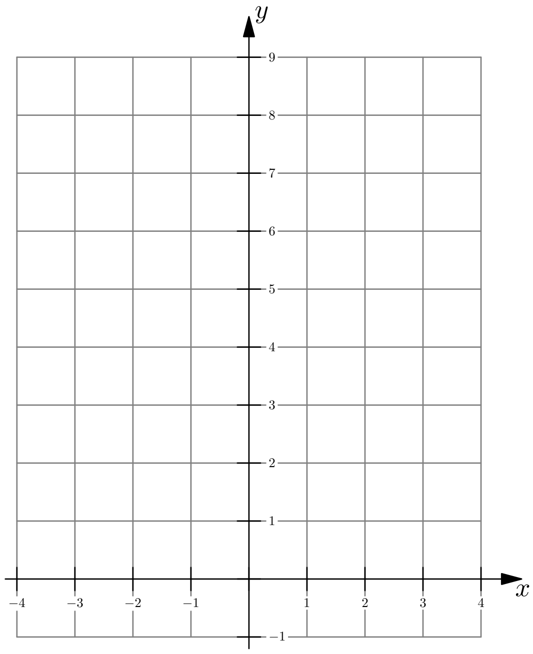
**Aufgabe 18.1** Warum sind Exponentialfunktionen nur für positive Basen definiert?

✎

**Aufgabe 18.2**

Zeichnen Sie die Graphen der Exponentialfunktionen für alle Basen $a \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3\right\}$ in das nebenstehende Koordinatensystem.
Vervollständigen Sie unter Beachtung der Graphen die folgenden Sätze:

- Alle Exponentialfunktionen gehen durch den Punkt ____________________.
- Der Graph der Exponentialfunktion $y = a^x$ ist monoton steigend für ____________________.
- Der Graph der Exponentialfunktion $y = a^x$ ist monoton fallend für ____________________.
- Der Wertebereich aller Exponentialfunktionen ist ____________________.
- Exponentialfunktionen haben ____________________ Nullstellen.
- Man erhält den Graphen der Funktion $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, indem man den Graphen von $y = a^x$ ____________________.




**Aufgabe 18.3** Welches Potenzgesetz steht hinter dem letzten Satz der letzten Aufgabe?

✎

**Merke 18.1** Manipulation von Funktionsgraphen

| **Ersetzung** | **Effekt** | **Beispiel mit** $f(x) = 2^x$ |
|---|---|---|
| $g(x) = f(x) + a$ | Verschiebung um $a$ in $y$-Richtung. | $g(x) = 2^x - 2$ |
| $g(x) = a \cdot f(x)$ | Streckung mit Faktor $a$ in $y$-Richtung (d.h. auch Spiegelung an $x$ wenn $a < 0$). | $g(x) = -\frac{1}{3} 2^x$ |
| $g(x) = f(x + a)$ | ⚠Verschiebung um $-a$ in $x$-Richtung. ⚠ | $g(x) = f(x - 2) = 2^{x-2}$ |
| $g(x) = f(a \cdot x)$ | ⚠Streckung mit Faktor $\frac{1}{a}$ in $x$-Richtung ⚠ (d.h. auch Spiegelung und $y$ wenn $a < 0$). | $g(x) = f(-2 \cdot x) = 2^{-2x}$ |

**Aufgabe 18.4** Ausgehend vom Graphen der Funktion $f(x) = 2^x$, skizzieren Sie die Graphen von $a(x) = -\frac{1}{2} f(x)$, $b(x) = f\left(-\frac{1}{2}x\right)$, $c(x) = f(x) - 4$, $d(x) = f(x-1)$, $e(x) = 1 - f(x-1)$.

**Aufgabe 18.5** Sie legen heute auf der Bank 1 Rp. zu einem Zins von 3% an und lassen sich anschliessend einfrieren, um in 2000 Jahren wiederbelebt zu werden. Wie gross ist Ihr Kapital dann, wenn der Zinssatz gleich geblieben ist?

Vergleichen Sie den Betrag mit dem Schweizer Bruttoinlandsprodukt.

Bestimmen Sie die Exponentialfunktion $k(n)$, die das Kapital nach $n$ Jahren beschreibt.

**Aufgabe 18.6** Üblicherweise verzinst eine Bank angelegtes Kapital jährlich. Die Zins-Usanz – die Art und Weise wie verzinst wird – kennt aber verschiedene Spielweisen. Berechnen Sie den Wert eines Frankens nach einem Jahr, wenn

a) jährlich zu 5% verzinst wird.
b) monatlich zu $\frac{5\%}{12}$ verzinst wird.
c) wöchentlich zu $\frac{5\%}{52}$ verzinst wird.
d) täglich zu $\frac{5\%}{365}$ verzinst wird.
e) sekündlich zu $\frac{5\%}{\cdots}$ verzinst wird.
f) über $n$ Perioden zu $\frac{p}{n}$ verzinst wird.

**Merke 18.2** Eulersche Zahl – Stetige Verzinsung

Die Eulersche Zahl $e$ kann man definieren als «Limes»

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.7182818284590 45\ldots$$

Wenn man einen Franken mit einem Zinssatz von $1 = 100\%$ «unendlich oft»/«kontinuierlich»/«stetig» verzinst, so hat man nach einem Jahr $e = 2.71\ldots$ Franken.
Man kann zeigen: Bei kontinuierlicher Verzinsung mit Zinssatz $p$ (etwa $p = 0.05 = 5 \cdot \frac{1}{100} = 5\%$ wie in der obigen Aufgabe) wird aus einem Franken in einem Jahr der folgende Betrag in Franken:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n = \mathrm{e}^p$$

Die Eulersche Zahl ist eine zentrale Grösse in der Mathematik und Naturwissenschaften.

**Aufgabe 18.7** Die folgenden Prozesse können jeweils mit einer Exponentialfunktion der Form $f(x) = c \cdot a^x$ beschrieben werden. Bestimmen Sie jeweils diese Exponentialfunktion und beantworten Sie damit die Frage(n).

a) Hochgiftiges Plutonium 239 zerfällt radioaktiv. Während 2410 Jahren (Halbwertszeit) nimmt seine Masse um die Hälfte ab (es entstehen andere Elemente). Wie gross ist der Massenverlust pro Jahr?
b) Die Anzahl Bakterien in einer Nährlösung verdoppelt sich alle drei Stunden. Zu Beginn befinden sich 10'000 Bakterien in der Nährlösung. Wie viele Bakterien sind nach 1, 2, 5 und 24 Stunden in der Nährlösung?
c) Lässt man eine 90° C heisse Tasse Tee bei 0° C Lufttemperatur stehen, kühlt sich die Tasse pro 25 min um die Hälfte ab. Wie warm ist die Tasse nach 10 min? Wie warm ist die Tasse nach 2 h? Bestimmen Sie mit dem TR, wie lange es geht, bis der Tee 50° C warm ist.

*Die Zahlen sind erfunden, die Tasse ist wohl eher gut isoliert.*

**Definition 18.2** Exponentielles Wachstum und Zerfall

Sei $B(t)$ eine Funktion, die den Bestand einer Substanz oder einer Tierart oder eines Geldbetrags usw. zum Zeitpunkt $t$ angibt. Die Zeit $t$ ist in einem beliebigen Zeitmass (Stunden, Sekunden, Jahre...) gemessen.

Falls sich der Bestand $B(t)$ pro Zeiteinheit um den Faktor $q$ gleichmässig vermehrt bzw. verringert, so spricht man von **exponentiellem Wachstum** (für $q > 1$) bzw. **exponentiellem Zerfall** (für $0 < q < 1$).

Für den Bestand $B(t)$ zur Zeit $t$ gilt dann die Formel

$$\boxed{B(t) = B_0 \cdot q^t \ ,}$$

wobei $B_0$ der Anfangsbestand zur Zeit 0 ist.
Hat man eine Zunahme (bzw. Abnahme) um den Faktor $q$ während einer Zeitdauer $\Delta t$, so gilt die Formel:

$$\boxed{B(t) = B_0 \cdot q^{\frac{t}{\Delta t}} \ .}$$

**Definition 18.3** Wachstumsfaktor

Für eine Wachstumsfunktion $B(t) = B_0 \cdot q^t$ und eine Zeitspanne $\Delta t$ heisst

$$r = \frac{B(t+\Delta t)}{B(t)} = ✎$$

der zur Zeitspanne $\Delta t$ gehörende **Wachstumsfaktor**.

**Aufgabe 18.8** Zeigen Sie, dass der Wachstumsfaktor von $\Delta t$, aber nicht von $t$ abhängt.

✎

**Merke 18.3** Halbwertszeit und Verdoppelungszeit

Bei jedem Zerfallsprozess ist die **Halbwertszeit** die zum Wachstumsfaktor $\frac{1}{2}$ gehörende Zeitspanne.
Bei jedem Wachstumsprozess ist die **Verdopplungszeit** die zum Wachstumsfaktor 2 gehörende Zeitspanne.

**Aufgabe 18.9** Nach 10 Tagen ist von einem radioaktiven Stoff noch 10% übrig. Wie gross ist die Halbwertszeit von diesem Stoff?
Sei $m(t)$ der Anteil (in $[0, 1]$) nach der Zeit $t$ in Tagen.

$m(t) =$ ✎
Für die Halbwertszeit $x$ gilt:

✎

Der TR liefert ✎

In der obigen Gleichung suchen wir einen Exponenten. Bis jetzt haben wir nur Gleichungen gelöst, wo die Unbekannte in der Basis steht, und haben dafür Wurzeln, bzw. rationale Exponenten verwendet.

I. Blöchliger, S. Knaus, O. Schnürer

**Aufgabe 18.10** Bestimmen Sie jeweils eine Exponentialfunktion der Form $f(x) = c \cdot a^x$, die die Situation beschreibt, und beantworten Sie mit Hilfe dieser Funktion und dem TR die Frage.

a) Auf einer Insel wird von Wissenschaftlern ein Atomtest durchgeführt; dabei wird Strontium 90 freigesetzt (Halbwertszeit 28 Jahre). Nach dem Test liegen die Strahlungswerte auf der Insel um 20% über der Toleranzgrenze. Nach wieviel Jahren kann man die Insel erstmals wieder betreten?

b) Ken und Berry glauben, dass der Schaum bei alkoholischen Getränken (Bier) schneller zerfällt als bei nicht-alkoholischen Getränken (Karamalz). Bei beiden Getränken steht der Schaum anfänglich 5cm hoch. Beim Bier misst Ken 14 Sekunden, bis der Schaum bei 4.5cm steht. Berry misst nach einer Minute eine Schaumhöhe von 3.1cm im Glas mit Karamalz. Der Zerfall kann bei beiden Getränken angenähert als exponentieller Zerfall beschrieben werden.
   (a) Wie hoch steht der Schaum im Karamalz Glas nach 3 Minuten?
   (b) Bei welchem Getränk zerfällt der Schaum schneller?
   (c) Zu welchem Zeitpunkt ist die prozentuale Abnahme pro Minute im Karamalz-Glas maximal?

**Merke 18.4** Konstante prozentuale Änderung

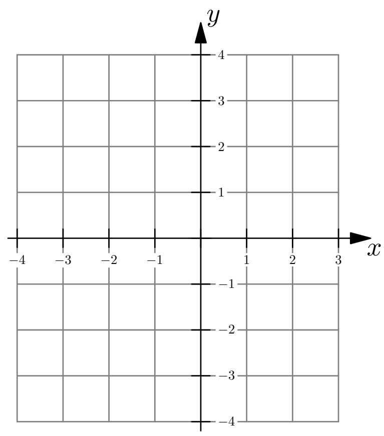
✎

Konstantes Bevölkerungswachstum z.B. würde in exponentiellem Wachstum resultieren; genauso verhält es sich mit dem BIP (pro Kopf) o.ä.

## 18.2 Logarithmen

**Aufgabe 18.11**

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = 2^x$ in das nebenstehende Koordinatensystem ein. Zeichnen Sie dann den Graphen der (unten definierten) Umkehrfunktion $g(x) = f^{-1}(x)$.
Der Wert $g(x_g)$ der Umkehrfunktion $g$ an der Stelle $x_g$ ist die Antwort auf die folgende Frage: «Welcher $x$-Wert $x_f$ erfüllt $f(x_f) = x_g$?»
Es gilt somit $g(f(x)) = x$. D.h. $g$ macht $f$ wieder rückgängig.




**Hinweis:** Die Notation $f^{-1}$ hat nichts mit Potenzieren oder dem Kehrwert zu tun und ist nur eine Notation, um die Umkehrfunktion zu schreiben. Diese rührt daher, dass $h(x) = f(g(x))$ als $h = f \circ g$ geschrieben werden kann, was ein bisschen wie eine Multiplikation aussieht. Die Multiplikation mit einer Zahl $a$ kann mit der Multiplikation mit $a^{-1}$ rückgängig gemacht werden.
In seltenen Fällen trifft man die Notation «arg $f$» an; sie ist dadurch motiviert, dass die Umkehrfunktion zum Wert $f(x)$ das Argument $x$ liefert.

**Merke 18.5** Graph der Umkehrfunktion

Den Graphen der Umkehrfunktion $f^{-1}$ erhält man, indem man den Graphen der Ausgangsfunktion $f$ an der 45°-Achsen-Winkelhalbierenden spiegelt.

Bis jetzt haben wir Exponentialfunktionen besprochen. In den kommenden Abschnitten geht es darum, die Umkehrfunktion einer Exponentialfunktionen kennenzulernen und Rechengesetze dafür herzuleiten.

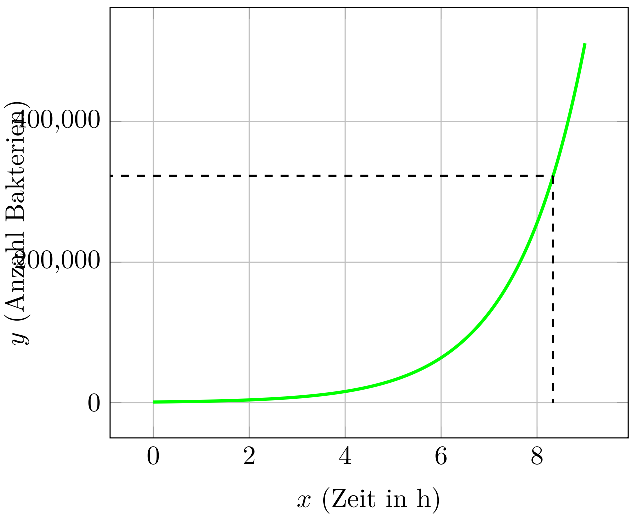
**Aufgabe 18.12** Herr Grünfink, Ihr Biolehrer, wird vermisst. Die Polizei sucht ihn.
Man weiss einzig, dass er gestern irgendwann noch im Biologie Labor der Schule war. Herr Rotsock, der Biologie-Laborant, weiss, dass Herr Grünfink momentan mit *Bacterii Mathematici Sangallenses* arbeitet. Er hat gestern noch eine Kultur frisch angelegt. Herr Rotsock teilt ebenfalls mit, dass Herr Grünfink jeweils die Kulturen mit 1000 Bakterien anlegt und sich die *Bacterii Mathematici Sangallenses* alle 60' verdoppeln.

Zur Rekonstruktion des Abends muss Polizist Jakobhans unbedingt wissen, wann Herr Grünfink im Labor war.

Können Sie ihm helfen? Herr Rotsock hat heute Morgen um 6h30 unter dem Mikroskop die Bakterien (mit Hilfe von Bilderkennungsalgorithmen) gezählt: $323'000$ Bakterien.

Wie lange müsste man warten wenn, wenn man

(1) 8'000 Bakterien braucht?
(2) 1'024'000 Bakterien braucht?
(3) 512'000 Bakterien braucht?
(4) 3000 Bakterien braucht?
(5) 200'000 Bakterien braucht?

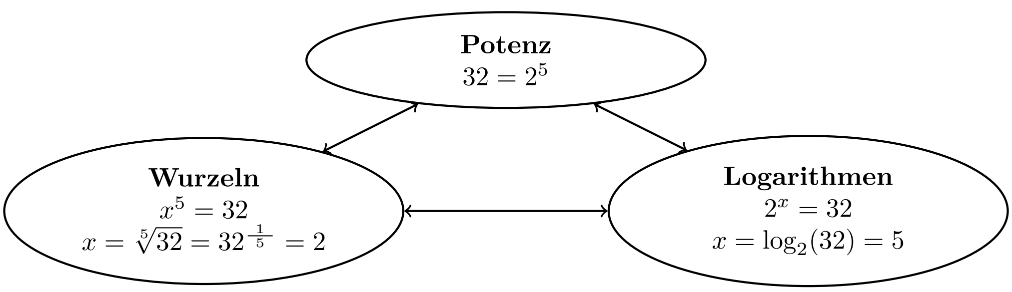



Wir suchen also den Wert ($x$ Achse, Zeit), bei dem die Bakterienanzahl $y = 323'000$ entspricht. Herr Grünfink müsste ✎ warten, um genau $323'000$ Bakterien vorzufinden.

✎

## 18.3 Logarithmen als Umkehrfunktion

Logarithmusfunktionen sind die Umkehrfunktionen von Exponentialfunktionen, so wie Wurzelfunktionen die Umkehrfunktionen von Potenzfunktionen sind. Nicht zu verwechseln mit einem *Algorithmus*, was eine Lösungs- oder Handlungsvorschrift ist, die z.B. mit einem Computerprogramm umgesetzt werden kann.




- Die Wurzel beantwortet die Frage nach der Basis bei einer Potenzgleichung.
- Der Logarithmus beantwortet die Frage nach dem Exponenten bei einer Exponentialgleichung.

Daraus ergibt sich folgende Definition:

**Definition 18.4** Logarithmus

Für $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $c \in \mathbb{R}^+$ definiert man

$$a = \log_b(c) \quad \Longleftrightarrow \quad b^a = c$$

Ausgesprochen als «$a$ **ist der Logarithmus zur Basis** $b$ **von** $c$». $b$ ist die **Logarithmusbasis** und $c$ ist das **Argument**.

**Merke 18.6** Logarithmus

Der Logarithmus **liefert den Exponenten**, mit dem die Basis potenziert werden muss, um das Argument (das was im Logarithmus steht) zu erhalten.
Für $c < 0$ ist $\log_b(c)$ nicht definiert, weil Exponentialfunktionen nur positive Werte liefern.
Es gilt $\log_b(1) = 0$, weil $b^0 = 1$.

## 18.4 Spezielle Logarithmusbasen

| **Basis** | **Name** | **Schreibweise** |
|---|---|---|
| 10 | Zehnerlogarithmus (dekadischer Logarithmus) | $\lg(c) := \log_{10}(c)$ |
| 2 | Zweierlogarithmus (binärer Logarithmus) | $\operatorname{lb}(c) := \log_2(c)$ |
| $\mathrm{e} \approx 2.7182818$ | Natürlicher Logarithmus | $\ln(c) := \log_{\mathrm{e}}(c)$ |

**Aufgabe 18.13** Berechnen Sie

a) $\lg(10'000)$ b) $\lg(0.1)$ c) $\lg\left(10^{23}\right)$ d) $\lg(0.0001)$

e) $\operatorname{lb}(1024)$ f) $\operatorname{lb}(0.125)$ g) $\ln(1)$ h) $\ln\left(\mathrm{e}^{\sqrt{2}}\right)$

**Aufgabe 18.14** Lösen Sie nach $x$ auf (Resultat als Logarithmus). Schätzen Sie für a) bis c) das Ergebnis von Hand ab, und überprüfen Sie mit dem TR.

a) $8^x = 16$ b) $2^x = 7$ c) $10^x = \frac{1}{2}$

d) $a^x = 7$ e) $2^x = b$ f) $z^x = y$

**Aufgabe 18.15** Beweisen Sie mit der Definition des Logarithmus, dass $\log_b\left(b^x\right) = x$ und $b^{\log_b(x)} = x$.

✎

**Aufgabe 18.16** Berechnen Sie von Hand mit der Idee $\log_b(b^a) = a$.

a) $\log_2(32)$ b) $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$ c) $\log_5(\sqrt{5})$

d) $\log_9(27)$ e) $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\right)$ f) $\log_7(1)$

**Aufgabe 18.17** Berechnen Sie von Hand mit der Idee $b^{\log_b(c)} = c$.

a) $3^{\log_3(7)}$ b) $9^{\log_3(\sqrt{5})}$ c) $2^{-\log_8(125)}$

**Aufgabe 18.18** Zeichnen Sie die Graphen folgender Funktionen.

a) $a(x) = \log_2(x)$ b) $b(x) = \log_{10}(x)$ c) $c(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$ d) $d(x) = \log_{\frac{1}{10}}(x)$

## 18.5 Logarithmusgesetze

Aus früheren Lektionen kennen Sie die Potenzgesetze:

**Merke 18.7** Potenzgesetze

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \quad \text{und} \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \quad \text{für } a \neq 0$$

$$a^r \cdot b^r = (ab)^r \quad \text{und} \quad \frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r \quad \text{für } b \neq 0$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

Diese Gesetze haben auch «logarithmische Geschwister»: Jedes dieser Gesetze lässt sich mit dem Logarithmus (zu einer beliebigen Basis) ausdrücken.

**Aufgabe 18.19** Richtig oder falsch? Finden Sie Gegenbeispiele oder gute Argumente für die Richtigkeit:

a) $\log_b(x+y) = \log_b(x) + \log_b(y)$
b) $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) \cdot \log_b(y)$
c) $\log_b(x-y) = \log_b(x) - \log_b(y)$
d) $\log_b\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{\log_b(x)}$
e) $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$
f) $\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\log_b(x)}$
g) $\log_b\left(x^y\right) = \left(\log_b(x)\right)^y$
h) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$
i) $\log_{\frac{1}{b}}(x) = -\log_b(x)$
j) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(y)}$

**Aufgabe 18.20** Beweisen Sie, dass $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$ (für $b, x, y \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 1$).
Vorgehen: Schreiben Sie $x$ und $y$ als Potenz von $b$ und setzen Sie ein. Welches Potenzgesetze verwenden Sie

✎

**Aufgabe 18.21** Beweisen Sie, dass $\log_b\left(x^y\right) = y \cdot \log_b(x)$ (für $b, x \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 1$, $y \in \mathbb{R}$).
Vorgehen: Schreiben Sie $x$ als Potenz von $b$ und setzen Sie ein. Welches Potenzgesetze verwenden Sie?

✎

**Aufgabe 18.22** Zeigen Sie mit den beiden vorherigen Gesetzen, dass auch Folgendes gilt:
a) $\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_b(x)$ b) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$

✎

**Aufgabe 18.23** Beweisen Sie den **Basiswechsel** für Logarithmen: $\log_b(x) = \frac{\log_c(x)}{\log_c(b)}$.
Vorgehen: Schreiben Sie $x$ als Potenz von $b$ und berechnen Sie $\log_c(x)$. Lösen Sie dann nach $\log_b(x)$ auf.

✎

Der Basiswechsel wird angewandt, um Logarithmen zu beliebigen Basen numerisch auszurechnen. Es stellt sich heraus, dass der natürliche Logarithmus zur Basis $\mathrm{e} \approx 2.7182818$ am einfachsten zu berechnen ist. Daher werden alle Logarithmen von Computern wie folgt berechnet:

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$$

**Merke 18.8** Logarithmusgesetze

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y) \qquad \log_b\left(x^y\right) = y \cdot \log_b(x)$$

Daraus folgt

$$\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_b(x) \qquad \log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y) \qquad \log_b(x) = \frac{\log_c(x)}{\log_c(b)}.$$

Vor der Ära der Taschenrechner waren Rechenschieber weit verbreitet. Die Grundform sind zwei **logarithmische Skalen**, d.h. die Zahl $x$ hat den Abstand proportional zu $\log(x)$ von der Zahl 1 (was als Nullpunkt der logarithmischen Skala aufgefasst werden kann). Damit kann nun multipliziert werden, indem mit zwei gleichen Skalen die Abstände addiert werden:

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$$

Bei «modernen» Rechenschiebern sind zusätzlich noch viele weitere Skalen vorhanden, die viele weitere Berechnungen erlauben, wie z.B. Quadrieren oder trigonometrische Funktionen.

**Aufgabe 18.24** Rechenschieber: Wer hat's erfunden?

**Aufgabe 18.25** Was ist der Zusammenhang zwischen $\log_x(y)$ und $\log_y(x)$?
*Hinweis: Zwei mögliche Ansätze: Basiswechsel oder Definition des Logarithmus und Gleichung umformen.*

**Aufgabe 18.26** Zerlegen Sie:

a) $\log\left(\frac{ab}{a+b}\right)$

b) $\log\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{x^2-y^2}\right)$

c) $\log_a\left(\frac{a \cdot b^c}{\sqrt[n]{a}}\right)$

d) $\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{999}{1000}\right)$

**Aufgabe 18.27** Fassen Sie als einen einzigen Logarithmus zusammen.

a) $\log(b) - \log(c+d)$

b) $2\log(x) + 3\log(y) - 5\log(z)$

c) $\frac{1}{3}(\log(b) + 2\log(c)) - \frac{1}{2}(5\log(d) + \log(f))$

d) $\ln(a+b) + 1$

I. Blöchliger, S. Knaus, O. Schnürer

## 18.6 Exponential- und Logarithmusgleichungen

**Aufgabe 18.28** Lösen Sie die Gleichungen $5^x = 10$ und $\log_3(x) = 4$.

✎

**Definition 18.5** Exponential- und Logarithmusgleichung

Kommt bei einer Gleichung die **Unbekannte im Exponenten** vor, spricht man von einer **Exponentialgleichung**.
Kommt bei einer Gleichung die **Unbekannte in einem Logarithmus** vor, spricht man von einer **Logarithmusgleichung**.

**Aufgabe 18.29** Lösen Sie die folgende Gleichung

$$\log\left(\frac{x}{2}\right) - \log(1-x) = 2 - \log(x).$$

✎

**Merke 18.9** Lösen von Exponential- und Logarithmusgleichungen

**Logarithmiert man eine Exponentialgleichung** (d.h. man nimmt den Logarithmus beider Seiten), kommen die Exponenten als Faktoren vor die Logarithmen.
**Exponenziert man eine Logarithmusgleichung** (d.h. man rechnet eine geeignete Basis hoch die beiden Seiten der Gleichung), fallen die Logarithmen weg. **Achtung:** Es muss eine Überprüfung der Lösungen erfolgen!

**Aufgabe 18.30** Lösen Sie folgende Gleichungen. Geben Sie das Resultat sowohl exakt (mit Logarithmen oder Potenzen) wie auch auf 4 signifikante Stellen angenähert an.

a) $2^x = e^7$
b) $3^{x+3} = 2^{2x}$
c) $3^{x+2} \cdot 2^{x+3} = 4^{x+4}$
d) $\left(\sqrt{2}^{x-1}\right)^{x+1} = \sqrt{3}^x$
e) $\log_2(x+4) = \log_2(2x+2)$
f) $\log_2(x+4) = \log_4(x+6)$
g) $\log_7(x-42) = \log_7(2x-23)$
h) $\log_3(x) + \log_4(x) = \log_5(x)$
i) $\log_3(-7x) = 2$
j) $\log_{2x-3}(27) = 3$
k) $\log_{7x^2-2x+2}(64) = 6$

## 18.7 Repetitionsaufgaben

**Aufgabe 18.31**

a) Für gewisse bildgebende Verfahren in der Medizin wird dem Patienten ein radioaktives Kontrastmittel verabreicht. Ein gängiges Isotop ist Fluor 18, das eine Halbwertszeit von knapp zwei Stunden hat. Die Vorbereitung des Isotops als Arznei dauert rund 50 Minuten.
   (a) Wie viel von der ursprünglichen Masse des Fluor 18 ist nach der Vorbereitung noch vorhanden?
   (b) Wann muss der Untersuch spätestens durchgeführt werden, wenn mindestens 60% des verabreichten Kontrastmittels noch vorhanden sein müssten?
b) Beim Beginn einer Epidemie kann die Anzahl Erkrankter mit einer Exponentialfunktion beschrieben werden. Vorgestern wurden 23 Erkrankte gezählt, heute 42.
   1) Prognostizieren Sie damit die Anzahl Erkrankter in 2 Tagen und in einer Woche.
   2) Berechnen Sie die Verdoppelungszeit. Lösen Sie die Gleichung von Hand und geben Sie ein exaktes Resultat nur mit natürlichen Zahlen und Logarithmen von natürlichen Zahlen an.

**Aufgabe 18.32** Zeichnen Sie jeweils die Graphen der angegebenen Funktionen in ein Koordinatensystem (je Teilaufgabe ein Koordinatensystem). Beschreiben Sie jeweils auch, wie der Graph von $f(x)$ zu transformieren ist, um die Graphen der anderen Funktionen zu erhalten.

a) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{x-2}$, $h(x) = \log_2(x)$
b) $f(x) = 3^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $h(x) = -3^x + 2$

**Aufgabe 18.33**

a) Beweisen Sie, dass $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$ (für $b, x, y \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 1$). Vorgehen: Schreiben Sie $x$ und $y$ als Potenz von $b$ und setzen Sie ein.
b) Mit Basiswechsel und weiteren Logarithmusgesetzen zeigen Sie, dass $\log_{\frac{1}{b}}(x) = -\log_b(x)$.
c) Mit Basiswechsel und weiteren Logarithmusgesetzen zeigen Sie, dass $\log_{b^2}(x) = \frac{1}{2}\log_b(x)$.
d) $^\star$ Sei $g_n$ eine geometrische Reihe mit $q > 0$ und $g_1 > 0$. Zeigen Sie, dass $a_n = \log_2(g_n)$ eine arithmetische Reihe ist und bestimmen Sie die zugehörige Differenz $d$.

**Aufgabe 18.34** Berechnen Sie von Hand:

a) $\log_7\left(\frac{1}{49}\right)$
b) $\log_{16}(8)$
c) $\log_{27}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right)$
d) $5^{\log_5(10)}$
e) $125^{\log_5(4)}$
f) $5^{\log_{125}(8)}$

Geometrische Reihe: $s_n = \sum_{i=1}^{n} g_i = g_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$   Kreis: $U = 2\pi r$   $A = \pi r^2$

**Aufgabe 18.35** Eine Spirale wird wie folgt gezeichnet: Beim Punkt $Z_1 = (0,0)$ wird mit dem Zirkel eingestochen und ein Viertelkreis mit Radius $r_1 = 1$ eingezeichnet, vom Punkt $(1,0)$ zum Punkt $(0,1)$.
Nach jedem Schritt wird der Radius um 25% erhöht und das Zentrum so verschoben, dass die Kreislinie im Gegenuhrzeigersinn sauber anschliesst. So ist z.B. im zweiten Schritt der Radius $r_2 = 1.25$ und das Zentrum $Z_2 = (0, -0.25)$ (damit der Kreisbogen beim Punkt $(0,1)$ beginnt).

a) Zeichnen Sie die ersten vier Kreisbogen mit Einheit 4 Häuschen.
b) Berechnen Sie die Gesamtlänge der Spirale nach 5 Umdrehungen (d.h. nach 20 Viertelkreisen).
c) ⋆ Berechnen Sie die x-Koordinate vom Zentrum des 20. Viertelkreises.

## 18.8 Bedeutung vom Logarithmus im Alltag

Logarithmusfunktionen kommen im Alltag in verschiedensten Bereichen vor, meist aber versteckt. Im Folgenden werden die mathematischen Zusammenhänge und einige Anwendungen aufgezeigt.

### 18.8.1 Webersches Gesetz

1834 bemerkte der Physiologe Ernst Heinrich Weber, dass ein Sinnesorgan ab einem bestimmten Intensitätsbetrag eine Veränderung registriert (differentielle Wahrnehmbarkeitsschwelle; englisch: just noticeable difference = gerade noch wahrnehmbarer Unterschied), die als Unterschied $\Delta R$ zum vorangehenden Reiz $R$ in einem bestimmten, gleich bleibenden Verhältnis $k$ zu diesem steht:

$$k = \frac{\Delta R}{R}$$

Beispiele:

- beim Tastsinn beträgt der erforderliche relative Unterschied $\frac{\Delta R}{R}$ nach Webers Versuchen etwa 3 Prozent des Hautdruckes,
- beim Helligkeitssehen etwa 1 bis 2 Prozent der Lichtstärke.
- beim Geschmack muss die Konzentration um 10 bis 20 Prozent steigen, um als stärker empfunden zu werden.
- ein relativer Gewichtsunterschied von ungefähr 2% eines in der ruhenden Hand gehaltenen Gegenstands wird erkannt. So nimmt man die Gewichtszunahme eines Gegenstands von zunächst 50 g (Gramm) erst wahr, wenn das Gewicht um 1 g auf 51 g angewachsen ist. Entsprechend muss 5000 g Gewicht um 100 g anwachsen, um schwerer zu wirken.

*Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Weber-Fechner-Gesetz, abgerufen am 23. Januar 2018*

### 18.8.2 Lichtintensität

LEDs können sehr schnell ein- und ausgeschaltet werden. Im folgenden Experiment wird eine LED pro Sekunde 1000 mal ein- und ausgeschaltet. Die Zeit, während der die LED pro Zyklus eingeschaltet ist, kann variiert werden und zwar linear in $2^{16} = 65536$ Stufen. Man spricht vom «duty cycle» (Tastgrad), der meist in % angegeben wird.

a) An einem Drehrad kann der duty cycle proportional zum Winkel eingestellt werden. Was stellen Sie fest? Erklärung?

b) Die LED wechselt alle 0.5 s den Dutycycle. Wie gross muss der Unterschied der beiden duty cycles sein, damit der Unterschied wahrnehmbar ist?

c) Zwei LEDs werden auf unterschiedliche duty cycles $d_1$ und $d_2$ gestellt. Regeln Sie die dritte LED so, dass die Helligkeit der dritten LED genau dazwischen liegt. Wie gross müsste der duty cycle nach dem Weberschen Gesetz sein (also Formel aus $d_1$ und $d_2$)?

✎

Wird die Leistung (Energie pro Zeit) mehrmals mit der gleichen Zahl multipliziert (prozentualer Anstieg), nehmen wir das als gleichmässigen (additiven) Anstieg der Helligkeit wahr. Aus der Multiplikation der Leistung wird eine Addition in der Wahrnehmung.

Was wir wahrnehmen, ist also nicht direkt die abgestrahlte Leistung, sondern der Logarithmus davon. Was ist der Logarithmus vom geometrischen Mittel?

$\log\left(\sqrt{ab}\right) =$

### 18.8.3 Logarithmische Skalen

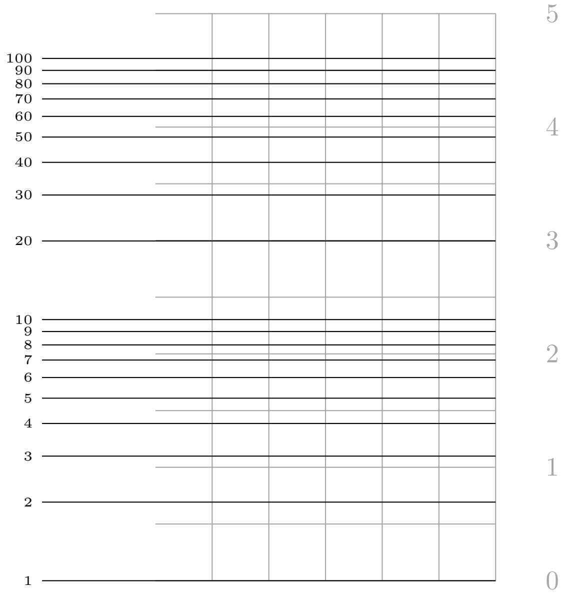
Bei Logarithmus-Papier ist bei gleichem Quotient zweier Zahlen ihr Abstand auf der logarithmischen Achse gleich. Das heisst z.B., dass der Abstand von 100 zu 10 und von 1 zu 0.1 ($\frac{100}{10} = \frac{1}{0.1} = 10$) der gleiche ist. Genau so ist z.B. der Abstand von 32 zu 4 und von 8 zu 1 identisch ($\frac{32}{4} = \frac{8}{1} = 8$). Um dies zu erreichen, wählt man eine logarithmische Skala, weil

$$\underbrace{\underbrace{\log 32 - \log 4}_{\text{Abstand von 32 und 4}} = \log\left(\frac{32}{4}\right) = \log(8) = \log\left(\frac{8}{1}\right) = \underbrace{\log 8 - \log 1}_{\text{Abstand von 8 und 1}}}_{\text{32 und 4 haben den gleichen Abstand wie 8 und 1}}$$

gilt. Entsprechend sind die Schritte:

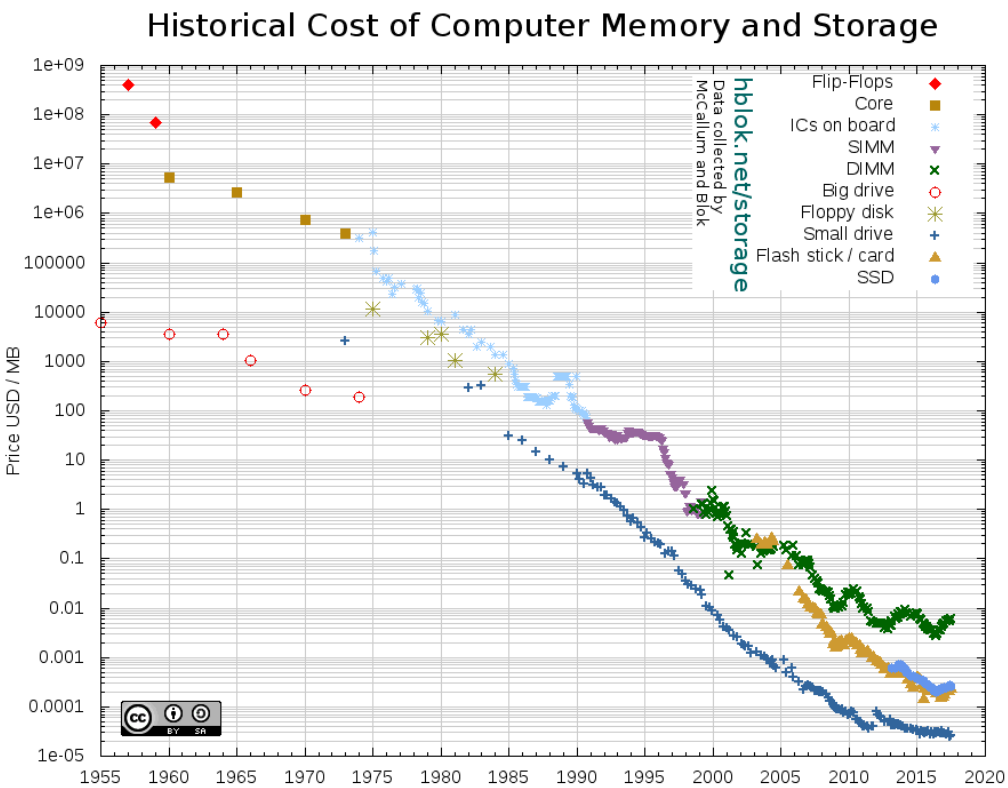
(a) Zeichne eine Hilfs-$y$-Achse in normaler, äquidistanter Skala.
(b) Berechne für die gewählten Ticks der Log-$y$ Achse den Logarithmus, d.h., wenn die Ticks $1,\ 2, \cdots, 10$ sind, dann berechnest du $\ln 1,\ \ln 2, \ldots, \ln 10$.
(c) Trage horizontale Linien mit $y$-Achsenabschnitt (auf der Hilfs-$y$-Achse) $\ln 1,\ \ln 2, \ldots, \ln 10$ ab.
(d) Beschrifte die Linien mit $1,\ 2, \ldots, 10$
(e) Je nach Ästhetik-Bewusstsein: Radiere die Hilfs-$y$-Achse.

Deine Log-Skala (Verwendung von ln) sollte ungefähr wie unten aussehen. In diesem Beispiel ist die Hilfs-$y$-Achse mit $1 \hat{=} 1.5\,\text{cm}$ konstruiert.




**Aufgabe 18.36** Zeichne logarithmisches Papier mit $\ln = \log_e$ und zeichne dann die Funktion $B_1(t) = 5 \cdot 2^t$ und $B_1(t) = 20 \cdot 0.5^t$ auf diesem Papier.

**Aufgabe 18.37** Auf der Webseite `https://hblok.net/blog/` werden Speicherpreise in USD pro Megabyte von Computern veröffentlicht.




Die «small drive» Preise sind Preise für übliche rotierende Festplatten «flash/stick» sind Preise für USB-Sticks und SD-Karten etc. Es scheint, dass die Preise für Flash-Speicher (USB-Sticks etc.) ungefähr parallel zu den Preisen von rotierenden Festplatten verlaufen.

(1) Wie könnten die Preise für Flash-Speicher modelliert werden?
(2) Was heisst es für das relative Preisgefüge, wenn die Preise von Flash-Speicher und herkömmlichen Festplatten parallel verlaufen?

**Merke 18.10** Geraden auf logarithmischer Skala

Ist der Graph einer Funktion auf einer logarithmischen Skala eine Gerade, so ist ✎

Verlaufen zwei Geraden in logarithmischer Skala parallel, so unterscheiden sich ✎

### 18.8.4 Erdbebenintensität

Zur Messung der Intensität von Erdbeben wird jeweils eine «Magnituden-Skala» verwendet. Dabei gibt es verschiedenste Mess- und Berechnungsmethoden und daraus gebräuchliche Skalen, die aber je nach Stärke des Bebens ungeeignet sind. Im jeweils brauchbaren Bereich liefern diese Methode aber vergleichbare Werte. Es wird jeweils versucht, die freigesetzte Energie zu bestimmen.

Die Richterskala liefert nur für Beben mit Magnitude unter 6.5 brauchbare Werte. In der Presse wird aber trotzdem oft von der «nach oben offenen Richterskala gesprochen», auch wenn andere Skalen zum Einsatz kamen.

Im Folgenden sprechen wir nur noch von «Magnitude», ohne die genaue Messmethode und Skala zu nennen.

Für zwei Erdbeben mit Magnituden $M_1$ und $M_2$ und den entsprechenden freigesetzten Energien $E_1$ und $E_2$ gilt folgender Zusammenhang:

$$\frac{E_2}{E_1} = 10^{\frac{3}{2}(M_2 - M_1)}.$$

Der Zusammenhang zwischen Magnitude $M$ und Energie $E$ in Joule ist

$$E = 10^{\frac{3}{2}M + 4.8}.$$

**Aufgabe 18.38** Wie viel mal mehr Energie wird freigesetzt, wenn die Magnitude um 1 steigt? Welcher Magnitude entspricht die Explosion der Hiroshima-Bombe, die ca. $5.25 \cdot 10^{13}$ Joule freigesetzt hat?

✎

**Aufgabe 18.39** Am 3. März 2017 gab es mit Magnitude 4.6 das stärkste Beben in der Schweiz (Epizentrum Urnerboden) seit mehr als 10 Jahren (Quelle: schweizerischer Erdbebendienst). Das Beben, das 1906 San Francisco zerstörte, hatte eine Magnitude von ca. 7.8.

Wie viel mal mehr Energie wurde beim Beben in San Francisco freigesetzt? ✎

**Fazit**

Die Magnituden-Skala ist ebenfalls eine logarithmische Skala. Konkret ist die Magnitude eine lineare Funktion eines Logarithmus der freigesetzten Energie.

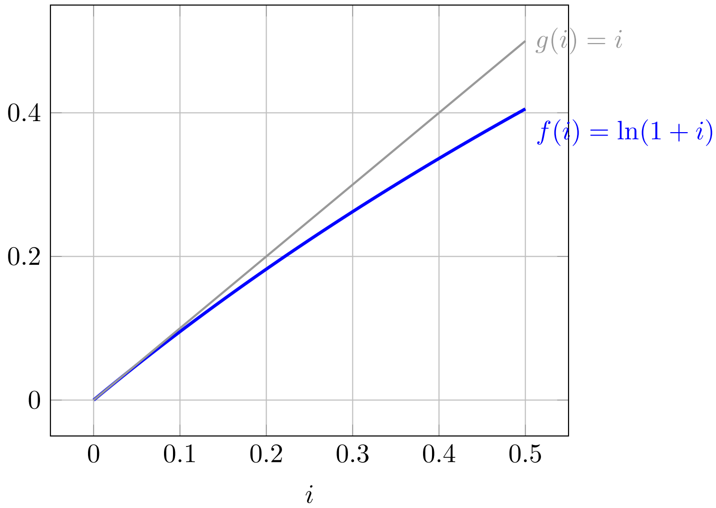
**Aufgabe 18.40** Wie wird aus der Energie $E$ die Magnitude $M$ berechnet? ✎

### 18.8.5 Rule of 72

**Aufgabe 18.41** Angenommen, die Bank verzinst ein Guthaben mit $i\%$. Wie lange dauert es, bis sich ein Betrag, z.B. Fr 100 verdoppelt hat? In anderen Worte, wie gross ist $x$ in $(1+i)^x = 2$. Finde eine Näherung für die Zeit $x$ bei einem beliebigen Zinssatz $i$. Tipps:

(a) Löse die Gleichung nach $x$ auf.

(b) Ersetze den Logarithmusterm durch eine Näherung. Verwende als Hilfe, dass $\ln(1+i) \approx i$ für kleine $i$ ist (wie aus untenstehender Grafik ersichtlich).




(c) Suche eine Zahl, die durch möglichst viele Zahlen ohne Rest teilbar ist in der Nähe deiner gefundenen Lösung.

**Merke 18.11** Rule of 72

Für kleine Zinssätze ($i \leq 10\%$) kann die Zeit $x$, $(1+i)^x = 2$, bis zur Verdoppelung des Werts einer Bankanlage mit $\frac{72}{\text{Prozent Verzinsung}}$ abgeschätzt werden. Bsp. $i = 8\%$, bis zur Verdoppelung vergehen ca. $\frac{72}{8} = 9$ Jahre (exakt sind es $\simeq 9.00647$ Jahre).

## 18.9 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

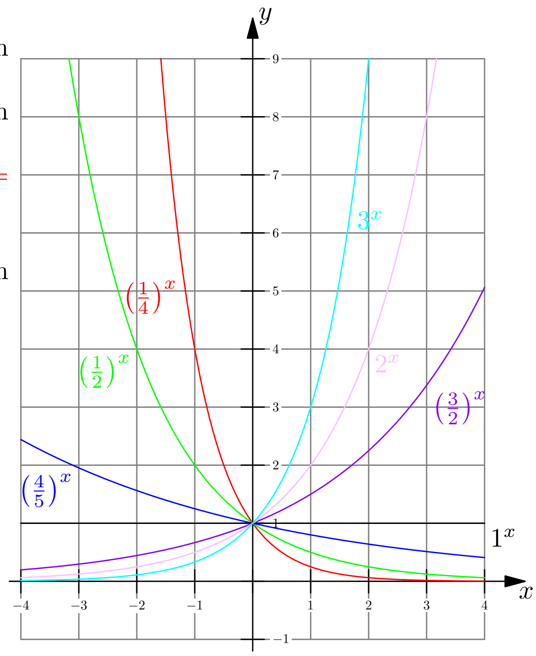
Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

**Lösung zu Aufgabe 18.2** ex-graphen-expfunkt

- Alle Exponentialfunktionen gehen durch den Punkt $(0, 1)$.
- Der Graph der Exponentialfunktion $y = a^x$ ist monoton steigend für $a > 1$.
- Der Graph der Exponentialfunktion $y = a^x$ ist monoton fallend für $a < 1$.
- Der Wertebereich aller Exponentialfunktionen ist $\mathbb{R}^+ = ]0, \infty[$.
- Exponentialfunktionen haben keine Nullstellen.
- Man erhält den Graphen der Funktion $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, indem man den Graphen von $y = a^x$ an der $y$-Achse spiegelt.




**Lösung zu Aufgabe 18.4** ex-graphen-manipulieren

$a(x)$: Streckung in $y$-Richtung mit Faktor $-\frac{1}{2}$, d.h. Stauchung und Spiegelung.

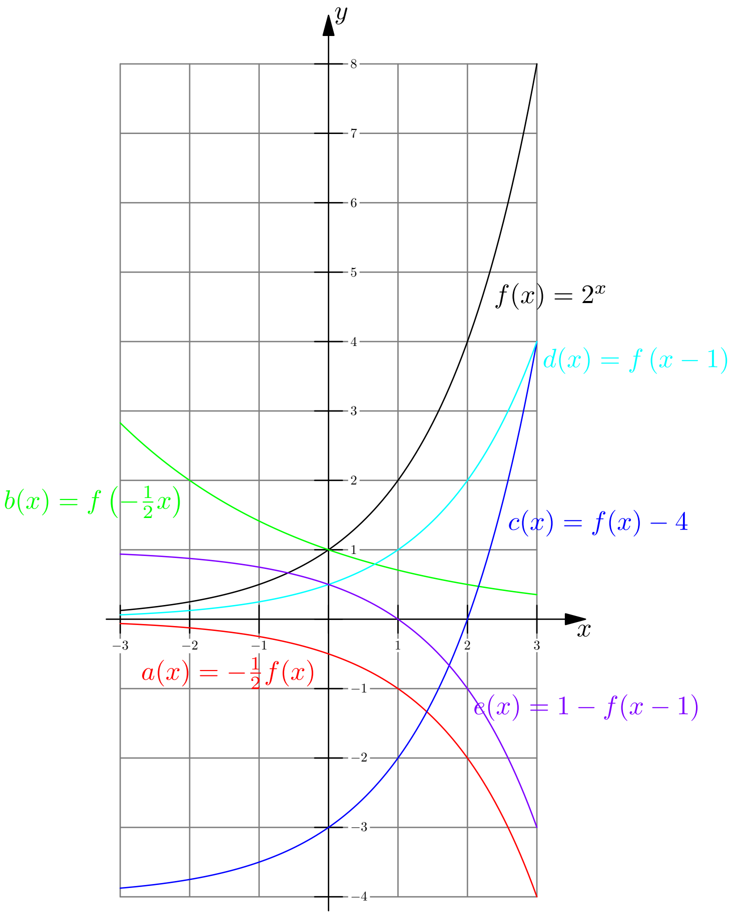
$b(x)$: Streckung in $x$-Richtung mit Faktor $-2$ (inkl. Spiegelung).

$c(x)$: Verschiebung in $y$-Richtung um $-4$ Einheiten.

$d(x)$: Verschiebung in $x$-Richtung um $+1$ Einheiten.

$e(x)$: Man betrachtet 3 Transformationen nacheinander:

- $e_1(x) = f(x-1)$: Verschiebung in $x$-Richtung um $+1$ Einheiten.
- $e_2(x) = -e_1(x) = -f(x-1)$: Spiegelung an der $x$-Achse (Streckung mit Faktor $-1$ in $y$-Richtung).
- $e(x) = e_2(x) + 1 = 1 - f(x-1)$: Verschiebung um $+1$ Einheiten in $y$-Richtung.




**Lösung zu Aufgabe 18.5** ex-2000-jahre-zinseszins

Jedes Jahr wird das vorhandene Kapital mit 1.03 multipliziert. D.h. nach 2000 Jahren ist das Kapital $k(2000) = 0.01 \cdot 1.03^{2000} \approx 4.726 \cdot 10^{23}$ in CHF.

Zum Vergleich beträgt das Schweizer Bruttoinlandsprodukt ca. $7.81 \cdot 10^{11}$ , das weltweite Bruttoprodukt ca. $1.0014 \cdot 10^{14}$ (im Jahr 2022)

Ein Wachstum vom jährlich 3% ist über längere Zeit unmöglich, weil so viele Resourcen schlicht nicht zur Verfügung stehen.

Eine Möglichkeit für solche Zinsen über längere Zeiträume besteht aber durchaus, wenn gleichzeitig die Inflation ähnlich hoch ist (tatsächlich ist die Inflation sogar meistens höher als die Zinsen auf Sparkonten). D.h. der nominale Betrag auf dem Sparkonto wird zwar immer grösser, in ähnlichem Masse ist das Geld aber immer weniger Wert. Siehe dazu auch https://de.wikipedia.org/wiki/Hyperinflation.

**Lösung zu Aufgabe 18.7** ex-modellierungs-aufgaben

a) $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2410}}$ mit $t$ in Jahren und $m_0$ die Ausgangsmasse (wird $m_0 = 1$ gewählt, kann die Funktion als Anteil der Ausgangsmasse interpretiert werden).
$m(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2410}} \approx 0.99971$, d.h. ein Verlust von $1 - m(1) \approx 0.02875\%$.

b) $a(t) = 10'000 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$ mit $t$ in Stunden. Damit
$a(1) \approx 12600$, $a(2) \approx 15870$, $a(5) \approx 31750$, $a(24) = 2'560'000$.

c) $T(t) = 90 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{25}}$ mit $t$ in Minuten.
$T(10) \approx 68.21$ in ° C und $T(120) \approx 3.231$ in ° C.
Löst man die Gleichung $90 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{25}} = 50$ erhält man $t \approx 21.20$ in Minuten.

**Lösung zu Aufgabe 18.10** ex-modellierungsaufgaben-teil2

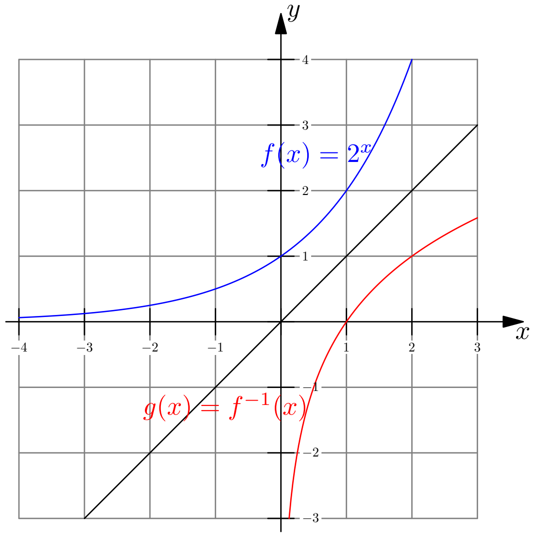
a) Es gilt $q^{28} = \frac{1}{2}$ und damit $q = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{28}} \approx 0.975549$. Geht man von einem Toleranzlevel $L$ aus, startet man bei $B_0 = (100\% + 20\%) \cdot L = 1.2 \cdot L$.
   Wir suchen also $t$ so, dass $L = 1.2 \cdot L \cdot q^t$. Kürzt man $L$ ergibt sich $1 = 1.2q^t \Leftrightarrow q^t = \frac{1}{1.2} = \frac{5}{6}$. Löst man diese Gleichung (TR) nach $t$ auf, erhält man $t \approx 7.36496$ Jahre.

b) Es empfiehlt sich, bei beiden Getränken mit der gleichen Zeiteinheit zu rechnen.
   (a) Für Karamalz gilt offensichtlich, dass $3.1 = 5 \cdot q^{60} \Leftrightarrow q = \left(\frac{3.1}{5}\right)^{\frac{1}{60}} \approx 0.992064$ und damit $B(180) = 5 \cdot q^{180} \approx 1.19164$. Der Schaum steht also bei ca. 1.2 cm.
   (b) Für $q_{\text{Bier}}$ gilt $q_{\text{Bier}} = \left(\frac{4.5}{5}\right)^{\frac{1}{14}} \approx 0.992502$. Es gilt $q_{\text{Bier}} \approx 0.992502 > 0.992064 = q_{\text{Karamalz}}$ und damit zerfällt der Schaum von Karamalz schneller.
   (c) Das ist eine «Fangfrage». Die prozentuale Änderung in einer Minute beträgt zum Zeitpunkt $t$: $\frac{B(t+60)}{B(t)} - 1 = \frac{B_0 \cdot q^{t+60}}{B_0 \cdot q^t} - 1 = \frac{B_0 \cdot q^t q^{60}}{B_0 \cdot q^t} - 1 = q^{60} - 1$. Das heisst, die prozentuale Abnahme ist konstant und unabhängig von der Zeit. Dies gilt für *alle* exponentiellen Wachstums- und Zerfallsprozesse.

**Lösung zu Aufgabe 18.11** ex-2hoch-umkehren

Vorgehen: Um z.B. $g(2)$ einzuzeichnen, muss folgende Frage beantwortet werden: «Für welchen $x$-Wert ist $f(x) = 2$?» Die Antwort ($x = 1$) kann auf dem Graphen von $f(x)$ abgelesen werden (wo ist der $y$-Wert gleich 2?). Konkret heisst das, wenn $(a, b)$ ein Punkt auf $f(x)$ ist (d.h. $f(a) = b$), dann ist $(b, a)$ ein Punkt $g(x)$.

Somit erhält man den Graphen von $g(x)$, wenn man den Graphen von $f(x)$ an der 45° Winkelhalbierenden spiegelt.




**Lösung zu Aufgabe 18.13** ex-spezielle-logarithmen-von-hand

a) $\lg(10'000) = 4$
b) $\lg(0.1) = -1$
c) $\lg\left(10^{23}\right) = 23$
d) $\lg(0.0001) = -4$
e) $\operatorname{lb}(1024) = 10$
f) $\operatorname{lb}(0.125) = -3$
g) $\ln(1) = 0$
h) $\ln\left(\mathrm{e}^{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$

**Lösung zu Aufgabe 18.14** ex-einfache-exponentialgleichungen

a) $8^x = 16 \iff x = \log_8(16) = \frac{4}{3}$ (man könnte die Gleichung so umformen, dass auf beiden Seiten die Basis 2 steht: $2^{3x} = 2^4$).
b) $2^x = 7 \iff x = \log_2(7) \approx 2.807$
c) $10^x = \frac{1}{2} \iff x = \lg\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0.3010$
d) $a^x = 7 \iff x = \log_a(7)$
e) $2^x = b \iff x = \log_2(b)$
f) $z^x = y \iff x = \log_z(y)$

**Lösung zu Aufgabe 18.16** ex-logarithmen-von-hand

a) $\log_2(32) = \log_2(2^5) = 5$

b) $\log_3\left(\frac{1}{81}\right) = \log_3\left(\frac{1}{3^4}\right) = \log_3\left(3^{-4}\right) = -4$

c) $\log_5(\sqrt{5}) = \log_5\left(5^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$

d) $\log_9(27) = \log_9\left(3^3\right) = \log_9\left(\left(\left(3^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^3\right) = \log_9\left(9^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}$

e) $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\right) = \log_2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2^4}}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2^{\frac{4}{3}}}\right) = \log_2\left(2^{-\frac{4}{3}}\right) = -\frac{4}{3}$

f) $\log_7(1) = \log_7\left(7^0\right) = 0$

### Lösung zu Aufgabe 18.17 ex-logarithmen-von-hand2

a) $3^{\log_3(7)} = 7$

b) $9^{\log_3(\sqrt{5})} = \left(3^2\right)^{\log_3(\sqrt{5})} = 3^{2\cdot\log_3(\sqrt{5})} = \left(3^{\log_3(\sqrt{5})}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$

c) $2^{-\log_8(125)} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^{-\log_8(125)} = \left(8^{-\log_8(125)}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{8^{\log_8(125)}}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}$

### Lösung zu Aufgabe 18.18 ex-logarithmen-zeichnen

### Lösung zu Aufgabe 18.25 ex-logxy-und-logyx

**Basiswechsel** zur Basis e:
$\log_x(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(x)}$ und $\log_y(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(y)}$. Damit gilt

$$\log_x(y) = \frac{1}{\log_y(x)}$$

Oder mit der **Definition des Logarithmus**:
Sei $a = \log_x(y)$ und $b = \log_y(x)$. Damit gilt $x^a = y$ und $y^b = x$. Potenziert man die erste Gleichung mit $\frac{1}{a}$ erhält man $x = y^{\frac{1}{a}}$ und damit $y^b = y^{\frac{1}{a}}$, also $b = \frac{1}{a}$ und damit $\log_x(y) = \frac{1}{\log_y(x)}$.

### Lösung zu Aufgabe 18.26 ex-logarithmen-zerlegen

a) $\log\left(\frac{ab}{a+b}\right) = \log(a) + \log(b) - \log(a+b)$

b) $\log\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{x^2-y^2}\right) = \frac{1}{4}\log(x) - \log(x+y) - \log(x-y)$

c) $\log_a\left(\frac{a\cdot b^c}{\sqrt[n]{a}}\right) = 1 + c\log_a(b) - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} + c\log_a(b)$

d) $\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{999}{1000}\right) = (\ln(1) - \ln(2)) + (\ln(2) - \ln(3)) + \ldots + \ln(999) - \ln(1000) = \ln(1) - \ln(1000) = 0 - \ln\left((2\cdot 5)^3\right) - 3\cdot(\ln(2) + \ln(5))$

### Lösung zu Aufgabe 18.27 ex-logarithmen-zusammenfassen

a) $\log(b) - \log(c+d) = \log\left(\frac{b}{c+d}\right)$

b) $2\log(x) + 3\log(y) - 5\log(z) = \log\left(x^2\right) + \log\left(y^3\right) - \log\left(z^5\right) = \log\left(\frac{x^2y^3}{z^5}\right)$

c) $\frac{1}{3}(\log(b) + 2\log(c)) - \frac{1}{2}(5\log(d) + \log(f)) = \log\left(\frac{\sqrt[3]{b\cdot c^2}}{\sqrt{d^5 f}}\right)$

d) $\ln(a+b) + 1 = \ln(a+b) + \ln(\mathrm{e}) = \ln(\mathrm{e}(a+b))$

### Lösung zu Aufgabe 18.30 ex-log-und-exp-gleichungen

a)

$$\begin{aligned} 2^x &= \mathrm{e}^7 && |\ln(\cdot) \\ x \cdot \ln(2) &= 7 && |:\ln(2) \\ x &= \frac{7}{\ln(2)} \approx 10.10 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 3^{x+3} &= 2^{2x} && |\ln(\cdot) \\ (x+3)\ln(3) &= 2x\ln(2) && |-2\ln(2)x \\ x(\ln(3)-2\ln(2))+3\ln(3) &= 0 && |-3\ln(3) \\ x(\ln(3)-2\ln(2)) &= -3\ln(3) && |:(\ln(3)-2\ln(2)) \\ x &= -\frac{\ln(3^3)}{\ln\left(\frac{3}{2^2}\right)} = \frac{\ln(27)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 3^{x+2}\cdot 2^{x+3} &= 4^{x+4} && |\ln(\cdot) \\ \ln\left(3^{x+2}\right)+\ln\left(2^{x+3}\right) &= (x+4)\ln(4) \\ (x+2)\ln(3)+(x+3)\ln(2) &= (x+4)\ln(4) \\ x(\ln(3)+\ln(2))+2\ln(3)+3\ln(2) &= x\ln(4)+4\ln(4) && |-x\ln(4)-2\ln(3)-3\ln(2) \\ x\ln(1.5) &= 4\ln(4)-2\ln(3)-3\ln(2) | :\ln(1.5) \\ x &= \frac{\ln\left(\frac{4^4}{3^2\cdot 2^3}\right)}{\ln(1.5)} \\ x &= \log_{1.5}\left(\frac{2^5}{3^2}\right) \approx 3.1285 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2}^{x-1}\right)^{x+1} &= \sqrt{3}^x \\ \sqrt{2}^{x^2-1} &= \sqrt{3}^x && |\ln(\cdot) \\ (x^2-1)\cdot\frac{1}{2}\ln(2) &= x\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln(3) && |-x\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln(3) \\ x^2\cdot\frac{1}{2}\ln(2)-x\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln(3)-\frac{1}{2}\ln(2) &= 0 && |\cdot 2 \\ \ln(2)x^2-\ln(3)x-\ln(2) &= 0 && |\text{quadratische Gleichung} \\ x_{1,2} &= \frac{\ln(3)\pm\sqrt{(\ln(3))^2+4\ln(2)^2}}{2\ln(2)} \\ x_1 &\approx 2.068 \\ x_2 &\approx -0.4835 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \log_2(x+4) &= \log_2(2x+2) && |2^{(\cdot)} \\ x+4 &= 2x+2 && |-x-2 \\ 2 &= x && \text{Probe: ok} \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} \log_2(x+4) &= \log_4(x+6) && |\text{Basiswechsel} \\ \log_2(x+4) &= \frac{\log_2(x+6)}{\log_2(4)} && |2^{(\cdot)} \\ x+4 &= \left(2^{\log_2(x+6)}\right)^{\frac{1}{2}} && \\ x+4 &= \sqrt{x+6} && |(\cdot)^2 \\ x^2+8x+16 &= x+6 && |-x-6 \\ x^2+7x+10 &= 0 && \text{quadratische Gleichung} \\ x_{1,2} &= \frac{-7\pm\sqrt{49-40}}{2} = \frac{-7\pm 3}{2} && \\ x_1 &= -2 && \text{Probe: ok} \\ x_2 &= -5 && \text{Probe: Logarithmus von negativer Zahl undefiniert.} \end{aligned}$$

Einzige Lösung ist $x = -2$.

g)

$$\begin{aligned} \log_7(x-42) &= \log_7(2x-23) && |7^{(\cdot)} \\ x-42 &= 2x-23 && |-x+23 \\ -19 &= x && \text{Probe: Logarithmus von negativer Zahl. Keine Lösung} \end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned} \log_3(x)+\log_4(x) &= \log_5(x) && \text{Basiswechsel} \\ \frac{\ln(x)}{\ln(3)}+\frac{\ln(x)}{\ln(4)} &= \frac{\ln(x)}{\ln(5)} && |-\frac{\ln(x)}{\ln(5)} \\ \ln(x)\cdot\left(\frac{1}{\ln(3)}+\frac{1}{\ln(4)}-\frac{1}{\ln(5)}\right) &= 0 && \\ \ln(x) &= 0 && |e^{(\cdot)} \\ x &= 1 && \text{Probe: ok} \end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned} \log_3(-7x) &= -3 && 3^{(\cdot)} \\ -7x &= \frac{1}{27} && |:(-7) \\ x &= -\frac{7}{27} && \text{Probe: ok} \end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned} \log_{2x-3}(27) &= 3 && |(2x-3)^{(\cdot)} \to P \\ 27 &= (2x-3)^3 && |(\cdot)^{\frac{1}{3}} \\ 3 &= 2x-3 && \\ x &= 3 && \text{Probe: ok} \end{aligned}$$

k) Analog vorherige Aufgabe oder mit $\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$:

$$\begin{aligned} \log_{7x^2-2x+2}(64) &= 6 && |\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)} \to P \\ \log_{64}(7x^2-2x+2) &= \frac{1}{6} && |64^{(\cdot)} \\ 7x^2-2x+2 &= 2 && |-2; \text{TU} \\ x(7x-2) &= 0 && \end{aligned}$$

$x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{2}{7}$ mit erfüllter Probe.

### Lösung zu Aufgabe 18.31 ex-repe-textaufgaben-exponentiell

a) Exponentialfunktion: $m(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/2}$ mit $t$ in Stunden (vom Beginn der Vorbereitung an gemessen), ergibt den noch vorhanden Anteil als Zahl zwischen 1 und 0.
   (a) Damit ist $m\left(\frac{5}{6}\right) \approx 0.7492$. Es ist also noch knapp 75% des Isotops übrig.
   (b) Es soll gelten $m(t) \geq 0.6 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{t/2} \geq 0.6$. Lösen wir also die Gleichung

$$\begin{aligned} 0.6 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{t/2} && |\ln(\cdot) \\ \ln(0.6) &= \frac{t}{2} \cdot \ln(\frac{1}{2}) && |:\ln(\frac{1}{2}); \cdot 2 \\ 2 \cdot \frac{\ln(0.6)}{\ln(\frac{1}{2})} &= t && \\ 1.47393 &\approx t && \end{aligned}$$

   Der Untersuch muss also spätestens 1.47 h resp. 88 min nach Gabe des Kontrastmittels durchgeführt werden.

b) In 2 Tagen wird die Anzahl Erkrankter mit $\frac{42}{23}$ multipliziert. Die Exponentialfunktion kann also wie folgt geschrieben werden:
   $E(t) = 23 \cdot \left(\frac{42}{23}\right)^{\frac{t}{2}}$ mit $t$ in Tagen nach vorgestern.
   Übermorgen erwartet man nach diesem Modell $E(4) \approx 77$ Erkrankte und in einer Woche $E(9) \approx 346$ Erkrankte.
   Für die Verdoppelungszeit $x$ gilt $\left(\frac{42}{23}\right)^{\frac{x}{2}} = 2$, also $\frac{x}{2} = \log_{\frac{42}{23}}(2)$ und damit $x = 2\frac{\ln(2)}{\ln(\frac{42}{23})} = 2\frac{\ln(2)}{\ln(42)-\ln(23)} \approx 2.302$ Tage.

### Lösung zu Aufgabe 18.32 ex-repe-graphen-zeichnen

a) Graph von $f(x)$ mit TR überprüfen. Graph von $g(x)$ ist um 2 Einheiten nach **rechts** verschoben. $\log_2(x)$ ist die Umkehrfunktion von $f(x)$ und damit an der 45° Winkelhalbierenden gespiegelt.

b) Graph von $f(x)$ mit TR überprüfen. Graph von $g(x)$ ist an $y$ gespiegelt. Graph von $h(x)$ ist erst an $x$ gespiegelt und dann um 2 Einheiten nach oben verschoben.

### Lösung zu Aufgabe 18.33 ex-repe-logarithmusgesetze

a) Siehe Theorie.

b) Man wendet die Basiswechselformel an: $\log_{\frac{1}{b}}(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b\left(\frac{1}{b}\right)} = \frac{\log_b(x)}{-1} = -\log_b(x)$, was zu beweisen war.

c) Man wendet die Basiswechselformel an: $\log_{b^2}(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(b^2)} = \frac{\log_b(x)}{2} = \frac{1}{2}\log_b(x)$

d) Es gilt $g_n = g_1 \cdot q^{n-1}$ und damit $a_n = \log_2(g_n) = \log_2\left(g_1 \cdot q^{n-1}\right) = \log_2(g_1) + (n-1)\cdot\log_2(q)$, was der Form einer arithmetischen Reihe mit erstem Glied $a_1 = \log_2(g_1)$ und Differenz $d = \log_2(q)$ entspricht.

### Lösung zu Aufgabe 18.34 ex-repe-logarithmen-von-hand

Hinweis: Die Aufgaben b) und c) können noch einfacher mit den Logarithmengesetzen berechnet werden, z.B. mit Basiswechsel zur Basis 2 bzw. 3.

a) $\log_7\left(\frac{1}{49}\right) = -2$

b) $\log_{16}(8) = \log_{16}\left(2^3\right) = \log_{16}\left(\left(16^{\frac{1}{4}}\right)^3\right) = \log_{16}\left(16^{\frac{3}{4}}\right) = \frac{3}{4}$

Oder $\log_{16}(8) = \frac{\log_2(8)}{\log_2(16)} = \frac{3}{4}$.

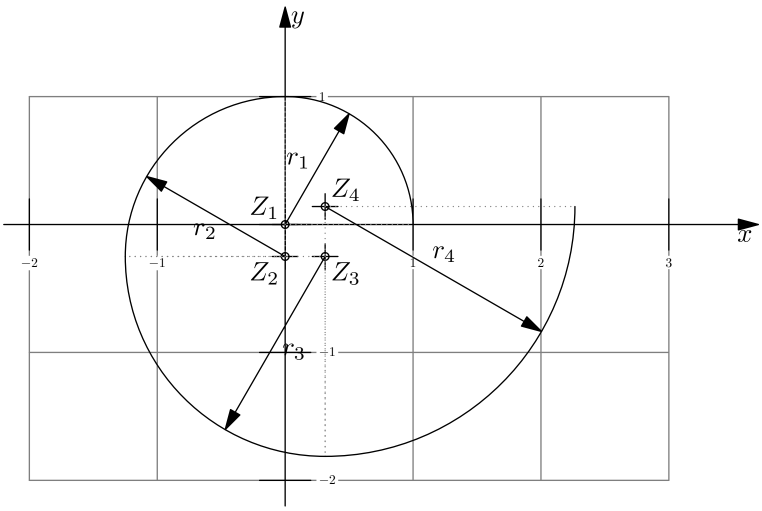
c) $\log_{27}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right) = \log_{27}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3^2}}\right) = \log_{27}\left(\frac{1}{3^{\frac{2}{3}}}\right) = \log_{27}\left(3^{-\frac{2}{3}}\right) = \log_{27}\left(\left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{2}{3}}\right) = \log_{27}\left(27^{-\frac{2}{9}}\right) = -\frac{2}{9}$

d) $5^{\log_5(10)} = 10$

e) $125^{\log_5(4)} = \left(5^3\right)^{\log_5(4)} = 5^{3\cdot\log_5(4)} = \left(5^{\log_5(4)}\right)^3 = 4^3 = 64$

f) $5^{\log_{125}(8)} = \left(125^{\frac{1}{3}}\right)^{\log_{125}(8)} = 125^{\frac{1}{3}\cdot\log_{125}(8)} = \left(125^{\log_{125}(8)}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$

### Lösung zu Aufgabe 18.35 ex-repe-geometrische-reihe




a)

b) Die Radien bilden eine geometrische Folge mit erstem Element $r_1 = 1$ und Quotient $q = \frac{5}{4}$. Die Folge der Bogenlängen $b_n = \frac{1}{4}\cdot 2\pi r_n = \frac{1}{2}\pi r_n$ ist ebenfalls geometrisch mit $q = \frac{5}{4}$. Die Länge der Spirale ist also

$$s_{20} = \sum_{i=1}^{20} b_i = b_1 \cdot \frac{q^{20}-1}{q-1} = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^{20}-1}{\frac{1}{4}} = 2\pi\cdot\left(\left(\frac{5}{4}\right)^{20}-1\right) \approx 538.7$$

c) Die $x$-Koordinate wird in jedem zweiten Schritt um die Differenz der Radien angepasst:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 = 0 \\ x_3 &= x_4 = x_2 + (r_3 - r_2) \\ x_5 &= x_6 = x_4 - (r_5 - r_4) \\ x_7 &= x_8 = x_6 + (r_7 - r_6) \\ \ldots &= \ldots \\ x_{19} &= x_{20} = x_{18} + (r_{19} - r_{18}) \end{aligned}$$

Die Differenzen $(r_3 - r_2)$, $-(r_5 - r_4)$, $+(r_7 - r_6)$, $\ldots$ bilden ebenfalls eine geometrische Folge mit $q = -\left(\frac{5}{4}\right)^2$. Die $x$-Koordinate $x_{20}$ ist also die Summe dieser Differenzen:

$$x_{20} = \sum_{i=1}^{9} (-1)^{(i+1)} \cdot (r_{2i+1} - r_{2i}) = \sum_{i=1}^{9} (r_3 - r_2) \cdot \left(-\left(\frac{5}{4}\right)^2\right)^{i-1} = (r_3 - r_2) \cdot \frac{\left(-\left(\frac{5}{4}\right)^2\right)^9 - 1}{-\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1} \approx 6.892$$

### Lösung zu Aufgabe 18.37 ex-logy-speicherpreise

(1) Nehmen wir an, $y_1$ sei der Preis von Flash-Speicher. Sei dann $\tilde{y}_1 = \ln y_1$. Weil nun $\tilde{y}_1 = mx + q_1$ gilt, muss also gelten, dass $y_1 = e^{\tilde{y}_1} = e^{mx+q_1} = \underbrace{(e^m)}_{=q}{}^x \cdot \underbrace{e^{q_1}}_{=B_0} = q^x \cdot B_0$. Das heisst, der Preis in USD pro Megabyte ist ungefähr ein logarithmischer Zerfall.

(2) Sei wieder $y_1$ der Preis von Flash-Speicher und $y_2$ der Preis von herkömmlichen Festplatten. Wiederum ist $\tilde{y}_1 = \ln y_1$ und $\tilde{y}_2 = \ln y_2$ Weil sie nun parallel verlaufen, gilt, dass $\tilde{y}_1 = mx + q_1$ und $\tilde{y}_2 = mx + q_2$ resp. $y_1 = e^{mx+q_1}$ und $y_2 = e^{mx+q_2}$. Betrachtet man nun den Quotienten von $y_1$ und $y_2$,

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{mx+q_1}}{e^{mx+q_2}} = \frac{e^{mx}e^{q_1}}{e^{mx}e^{q_2}} = \frac{e^{q_1}}{e^{q_2}} = e^{q_1 - q_2}.$$

Das heist, der Quotient ist konstant, damit ist auch der prozentuale Unterscheid konstant. In anderen Worten: Flash Speicher kosteten immer x% mehr als herkömmliche Festplatten pro Megabyte.

### Lösung zu Aufgabe 18.41 ex-rule-of-72

Logarithmiert man die Gleichung $(1+i)^x = 2$ auf beiden Seiten erhält man $x \ln(1+i) = \ln(2)$. Da nun $\ln(1+i) \approx i$ ist, folgt, dass $x \cdot i \approx \ln(2)$ ist. Weil $\ln(2) \approx 0.693$. Die Lösung der Gleichung $i \cdot x \approx 0.693$ ist also $x \approx \frac{0.693}{i}$. Ist nun $i$ in Prozent möchte man also eine Zahl mit möglichst vielen Teilern in der Nähe von $69.3 = 100 \cdot 0.693$. Weil $72 = 2^3 \cdot 3^2$ ist, folgt also, dass 72 eine gute Wahl ist und man die Verdoppelungszeit approximativ mit $\frac{72}{i\%}$ berechnen kann.