



17 Folgen und Reihen

✂ **Aufgabe 17.1** Betrachten Sie die folgenden Zahlenfolgen:

- | | |
|---|---|
| (1) $a_0 = 7, a_1 = 9, a_2 = 11, a_3 = 13, a_4 = 15, \dots$ | (2) $32, 27, 22, 17, 12, \dots$ |
| (3) $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$ | (4) $\frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, 4, \dots$ |
| (5) $1, -3, 9, -27, 81, -243, \dots$ | (6) $0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$ |
| (7) $\frac{32}{3}, \frac{16}{9}, \frac{8}{27}, \frac{4}{81}, \dots$ | (8) $3, \frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}, -3, \dots$ |
| (9) $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$ | (10) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$ |
| (11) $800, 1200, 1400, 1500, 1550, \dots$ | (12) $12, 9, 7, 6, 6, 7, 9, 12, 16, \dots$ |

- (a) Finden Sie jeweils die nächsten vier Folgenglieder.
 (b) Finden Sie für jede Folge eine Formel, mit der man das Folgenglied a_n aus dem vorhergehenden Folgenglied a_{n-1} berechnen kann (für beliebiges natürliches $n \geq 1$); in der Formel dürfen auch n oder weitere Folgenglieder vorkommen.
 Beachten Sie: Alle Folgen beginnen mit dem Folgenglied a_0 .
 (c) Finden Sie eine Formel, mit der man aus dem Index (= der Nummer) n das Folgenglied a_n der Folge berechnen kann.
 Bemerkung: Bei zwei der zwölf Folgen ist dies nicht so einfach.
 (d) Acht der obigen 12 Folgen lassen sich in zwei Typen einteilen, die jeweils durch Formeln gleicher Bauart beschrieben werden können. Welche?

17.1 Notation und Definitionen

Definition 17.1 Folge

Eine umgangssprachliche Folge reeller Zahlen

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots$$

wird auch mathematisch als **Folge** reeller Zahlen bezeichnet. Die gesamte Folge wird wie folgt abgekürzt:

$$(a_n) \stackrel{\text{Def.}}{=} a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$$

Die in der Folge auftretenden Zahlen heissen **Folgenglieder** oder **Glieder** der Folge. Die Nummer eines Folgenglieds a_i ist i . Z.B. hat das zweite Folgenglied a_1 den Index 1.

Formal ist eine Folge a eine Funktion $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Traditionellerweise schreibt man a_n statt $a(n)$.

In einigen Texten (z.B. unserer Formelsammlung) startet die Nummerierung von Folgen mit dem Index 1 statt mit dem Index 0, d.h. Folgen starten mit a_1 statt mit a_0 wie bei uns. Die Konvention mit dem Index 0 zu beginnen führt zu schöneren Formeln und ist vor allem in der Informatik gebräuchlich.

Definition 17.2 Arithmetische Folge

Eine Folge (a_n) heisst **arithmetisch**, wenn bei jedem Schritt von einem Folgenglied zum nächsten dieselbe Zahl addiert wird, wenn es also ein $d \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$a_{n+1} - a_n = d \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Mit anderen Worten ist eine Folge genau dann arithmetisch, wenn sie die Gestalt

$$(a_n) = a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, a_0 + 3d, a_0 + 4d, \dots$$

hat für einen geeigneten Startwert a_0 und eine Konstante $d \in \mathbb{R}$.

Die Zahl d ist die konstante **Differenz** der Folge. Manchmal nennt man d auch die «Schrittweite» der Folge.