17.1.1 Arithmetisches und geometrisches Mittel

Definition 17.4 Arithmetisches und geometrisches Mittel

Das **arithmetische Mittel** zweier reeller Zahlen x und y ist definiert durch

$$\frac{x+y}{2}$$

Das **geometrische Mittel** zweier nicht-negativer reeller Zahlen x und y ist definiert durch

$$\sqrt{xy}$$

«Mittel» steht beide Male als Abkürzung für «Mittelwert».

Aufgabe 17.9

a) Berechnen Sie das arithmetische und geometrische Mittel von 2 und 8.

b) Berechnen Sie das arithmetische und geometrische Mittel von 4 und 36.

c) Beweisen Sie, dass bei einer arithmetischen Folge jedes Folgeglied das arithmetische Mittel seiner beiden Nachbarglieder ist.

d) Beweisen Sie, dass bei einer geometrischen Folge mit nicht-negativen Folgegliedern jedes Folgeglied das geometrische Mittel seiner beiden Nachbarglieder ist.

e) Finden Sie eine geometrische Interpretation sowohl für das arithmetische Mittel als auch für das geometrische Mittel.
Hinweis beim geometrischen Mittel: Rechteck und Quadrat

f) Verallgemeinern Sie das arithmetische und geometrische Mittel auf 3 Werte und finden Sie entsprechende Interpretationen.

g) Beweisen Sie, dass das geometrische Mittel zweier nicht-negativer Zahlen x und y stets kleiner-gleich als ihr arithmetisches Mittel ist.

17.2 Reihen und das Summenzeichen $\sum$

Definition 17.5 Summenzeichen $\sum$

Das **Summenzeichen** $\sum$, ein grosses griechisches Sigma, wird verwendet, um eine Summe mit mehreren Summanden platzsparend aufzuschreiben. Im Beispiel rechts durchläuft die **Laufvariable** i aufsteigend alle ganzen Zahlen von der **unteren Grenze** 5 bis zur **oberen Grenze** 42 (jeweils einschliesslich). Für jeden Wert von i wird $f(i)$ berechnet und alle so erhaltenen Zahlen werden aufsummiert.

$$\sum_{i=5}^{42} f(i)$$

Mit anderen Worten gilt

$$\sum_{i=5}^{42} f(i) = f(5) + f(6) + f(7) + \cdots + f(41) + f(42)$$

Achtung, Konvention: Das Summenzeichen $\sum$ «bindet stärker» als das Pluszeichen $+$, aber schwächer als das Multiplikationszeichen oder «hoch». Es gilt also

$$\sum_{i=1}^{3} 5\cdot i^2+1 = \left(\sum_{i=1}^{3} 5\cdot i^2\right)+1 = 5\cdot1^2+5\cdot2^2+5\cdot3^2+1 \quad \neq \quad \sum_{i=1}^{3}\left(5\cdot i^2+1\right) = (5\cdot1^2+1)+(5\cdot2^2+1)+(5\cdot3^2+1)$$

Konvention: Wenn die untere Grenze grösser ist als die obere Grenze, so ist die Summe **leer** und wird als 0 definiert. Zum Beispiel gilt $\sum_{i=42}^{23} i = 0$.