c) Die Höhe im gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge s ist $\dfrac{\sqrt{3}}{2}s$ (erhält man mit dem Satz von Pythagoras). Damit ist die Fläche (mit $s = 1$):

$$A_0 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Die Dreiecke nach dem ersten Schritt dazukommen wurden mit Faktor $\dfrac{1}{3}$ gestreckt, d.h. die Fläche wird mit dem Faktor $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$ multipliziert. Die Anzahl Dreiecke ist 3, also

$$A_1 = A_0 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot A_0 = A_0 + \frac{1}{3} \cdot A_0 = \frac{4}{3} \cdot A_0 = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Die Anzahl neuer Dreiecke beim dritten Schritt ist $3 \cdot 4$ (Anzahl Strecken nach dem zweiten Schritt), deren Fläche ist $\left(\dfrac{1}{9}\right)^2 \cdot A_0$, also

$$A_2 = A_1 + 3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot A_0 = A_1 + \frac{4}{27} \cdot A_0 = A_1 + \frac{\sqrt{3}}{27} = \frac{10\sqrt{3}}{27}$$

Beim vierten Schritt kommen 4 mal so viele Dreiecke mit $\dfrac{1}{9}$ der Fläche wie beim dritten Schritt hinzu. Also

$$A_3 = A_2 + 4 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{27} = \frac{10\sqrt{3}}{27} + \frac{\sqrt{3}}{81} = \frac{31\sqrt{3}}{81}$$

Diesen Prozess kann man weiterführen und als Summe schreiben:

$$A_n = A_0 + \frac{1}{3}A_0 + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3}A_0 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}A_0 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 \cdot \frac{1}{3}A_0 + \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3}A_0$$

Mit dem Summenzeichen (der erste Schritt ist speziell):

$$A_n = A_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^i \cdot \frac{1}{3}A_0 = A_0 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^i\right)$$

Die Summe ist eine geometrische Reihe mit $g_0 = 1$ und $q = \dfrac{4}{9}$. Die Teilsumme ist $s_{n-1} = g_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$. Und damit

$$A_n = A_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\,\frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{1 - \frac{4}{9}}\right) = A_0 \cdot \left(1 + 3\frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{5}\right)$$

d) Der Umfang wird beliebig gross, d.h. strebt gegen unendlich. Die Fläche aber strebt gegen einen konstanten, endlichen Wert, weil der Term $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}$ gegen 0 strebt. D.h. die Fläche wird nie grösser als

$$A = A_0 \cdot \left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{8}{5}A_0,$$

kommt diesem Wert aber beliebig nahe.
Ein Beispiel aus dem Alltag betrifft die Fläche und Umfang einer Insel. Die Fläche ist klar endlich. Die Länge der Küstenlinie ist es aber nicht zwingend, wenn man sich vorstellt, dass sich die Küstenlinie um jeden Stein, Sandkorn, Stäubchen, etc. windet. (Ok, beim Atom ist dann irgendwann Schluss, oder spätestens bei der Planck-Länge, wenn dann auch der Raum quantisiert und unscharf werden soll).

Lösung zu Aufgabe 17.20 ex-collatz
a) $c = 1$: $(a_n) = 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$