a) $c_n = a_n + b_n = a_0 + nd + b_0 + ne = (a_0 + b_0) + n(d + e)$. Damit ist (c_n) arithmetisch mit Startwert $a_0 + b_0$ und Differenz $d + e$.

b) $f_n = n \cdot a_n = n \cdot (a_0 + n \cdot d) = n \cdot a_0 + n^2 \cdot d$. Im Allgemeinen ist (f_n) wegen des quadratischen Terms n^2 nicht arithmetisch. (Wird n um 1 erhöht, wächst die Folge nicht konstant, sondern umso mehr, je grösser n ist).
Damit die Folge arithmetisch ist, darf kein n^2 mehr vorkommen, d.h. es muss $d = 0$ gelten. Das ist der Fall, wenn die Folge (a_n) die konstante Folge ist (d.h. alle Folgeglieder sind gleich).

c) $e_n = 2^{a_n} = 2^{a_0+nd} = 2^{a_0} \cdot 2^{nd} = 2^{a_0} \cdot \left(2^d\right)^n$. Damit ist (e_n) geometrisch mit Startwert $e_0 = 2^{a_0}$ und Quotient $q = 2^d$.

Lösung zu Aufgabe 17.9 ex-arithmetische-und-geometrische-mittelwerte

a) arithmetisches Mittel: $\dfrac{2+8}{2} = 5$; geometrisches Mittel $\sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$.

b) $\dfrac{4+36}{2} = 20$ und $\sqrt{4 \cdot 36} = 12$.

c) Sei a_n ein Folgeglied und d die Differenz der Folge. Die beiden Nachbarglieder sind also $a_{n-1} = a_n - d$ und $a_{n+1} = a_n + d$. Das arithmetische Mittel der beiden Nachbarglieder ist

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+2}}{2} = \frac{(a_n - d) + (a_n + d)}{2} = \frac{2a_n}{2} = a_n$$

was zu beweisen war.

d) Sei g_n ein Folgeglied und $q \neq 0$ der Wachstumsfaktor (= Quotient) der Folge. Die beiden Nachbarglieder sind also $g_{n-1} = \dfrac{g}{q}$ und $g_{n+1} = g \cdot q$. Das geometrische Mittel der beiden Nachbarglieder ist

$$\sqrt{g_{n-1} \cdot g_{n+1}} = \sqrt{\frac{g_n}{q} \cdot (g_n \cdot q)} = \sqrt{g_n \cdot g_n} = g_n$$

was zu beweisen war. Für die letzte Gleichheit wurd $g_n \geq 0$ verwendet.

e) Das arithmetische Mittel ist die Mitte zwischen x und y, wenn man sich x und y auf dem Zahlenstrahl vorstellt.
Sei ein Rechteck mit Seitenlängen x und y. Das geometrische Mittel ist die Seitenlänge eines Quadrats mit gleicher Fläche wie das Rechteck. Das arithmetische Mittel ist die Seitenlänge eines Quadrats mit gleichem Umfang wie das Rechteck.

f) Seien a, b, c drei Zahlen. Das arithmetische Mittel ist $\dfrac{a+b+c}{3}$, das geometrische Mittel ist $\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$. Die Mittel sind die Seitenlängen eines Würfels mit gleicher Kantenlängesumme im arithmetischen und mit gleichem Volumen im geometrischen Fall.

g) Zu zeigen ist $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$ oder äquivalent $2\sqrt{xy} \leq x + y$ oder äquivalent (da beide Seiten nicht-negativ sind) $4xy \leq (x+y)^2$ oder äquivalent $4xy \leq x^2 + 2xy + y^2$ oder äquivalent $0 \leq x^2 - 2xy + y^2$ oder äquivalent $0 \leq (x-y)^2$. Letzteres gilt aber stets, da Quadrate reeller Zahlen nicht-negativ sind.

Lösung zu Aufgabe 17.10 ex-summen-implizit-schreiben

a) $\displaystyle\sum_{x=4}^{18}(x^2 - 5) = (4^2 - 5) + (5^2 - 5) + (6^2 - 5) + \ldots + (17^2 - 5) + (18^2 - 5)$

b) $\displaystyle\sum_{p=-2}^{2}\left(p^3 + \frac{1}{p}\right) = \left((-2)^3 + \frac{1}{-2}\right) + \left((-1)^3 + \frac{1}{-1}\right) + \left(0^3 + \frac{1}{0}\right) + \left(1^3 + \frac{1}{1}\right) + \left(2^3 + \frac{1}{2}\right)$
Ja, die Summe ist wegen der Division durch Null nicht definiert.

c) $\displaystyle\sum_{q=15}^{20}\sqrt{10} - \pi = \sqrt{10} + \sqrt{10} + \sqrt{10} + \sqrt{10} + \sqrt{10} + \sqrt{10} - \pi$ **Achtung:** von 15 bis 20 sind es 6 Summanden!