I. Blöchliger, S. Knaus, O. Schnürer

c) Es gilt $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Zu zeigen ist, dass dann auch $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$ ist. Die Idee ist, die erste Gleichung mit λ zu mulitiplizieren:

$$\begin{aligned}
a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n && \mid \cdot \lambda \\
\lambda a_{n+2} &= \lambda\left(a_{n+1} + a_n\right) \\
\lambda a_{n+2} &= \lambda a_{n+1} + \lambda a_n \\
b_{n+2} &= b_{n+1} + b_n && \text{Q.E.D.}
\end{aligned}$$

d) Addiert man die beiden Gleichungen $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ und $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$ erhält man

$$\begin{aligned}
a_{n+2} + b_{n+2} &= a_{n+1} + a_n + b_{n+1} + b_n \\
a_{n+2} + b_{n+2} &= \left(a_{n+1} + b_{n+1}\right) + \left(a_n + b_n\right) \\
c_{n+2} &= c_{n+1} + c_n && \text{Q.E.D.}
\end{aligned}$$

e) Mit $g_0 = 0$, $g_1 = \varphi$, $h_0 = 1$ und $h_1 = \psi$ und $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$ erhält man:

$$\begin{cases} n = 0: & x + y = 0 \\ n = 2: & x\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + y\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$$

Die Lösungen sind $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ und $y = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$$f_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$