


✂ Lösung zu Aufgabe 17.2 ex-expl-impl-rek

- a) $(a_n) = 8, 7, 6, 5, 4, 3, \dots$ und $(a_n) = \begin{cases} a_0 = 8 \\ a_n = a_{n-1} - 1 \end{cases}$ für alle $n \geq 1$. Die Folge ist arithmetisch.
- b) $a_n = 3 \cdot 2^n$ und $(a_n) = \begin{cases} a_0 = 3 \\ a_n = a_{n-1} \cdot 2 \end{cases}$ für alle $n \geq 1$. Die Folge ist geometrisch.
- c) $(a_n) = 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$ und $a_n = n^2$. Diese Folge ist weder arithmetisch noch geometrisch, denn die Differenzen bzw. Quotienten aufeinanderfolgender Folgeglieder sind nicht konstant. (Man sagt, dass diese Folge eine «arithmetische Folge 2. Ordnung» ist, weil ihre Differenzenfolge (= Folge der Differenzen) $1, 3, 5, 7, \dots$ eine arithmetische Folge ist).
- d) $(a_n) = 16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots$ und $(a_n) = \begin{cases} a_0 = 16 \\ a_n = a_{n-1} \cdot \frac{1}{2} \end{cases}$ für alle $n \geq 1$. Die Folge ist geometrisch.
- e) $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ und z.B. $(a_n) = \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2^n} \end{cases}$ für alle $n \geq 1$. Die Folge ist weder arithmetisch noch geometrisch. Sie ist die Folge der Teilsummen einer geometrischen Folge.
- f) $(a_n) = 100, 102, 104.04, 106.1208, \dots$ und $a_n = 100 \cdot (1.02)^n$. Die Folge ist geometrisch.

✂ Lösung zu Aufgabe 17.3 ex-param-arithmetisch

Generell gilt $a_n = a_0 + nd$.

Setzt man die gegebenen Grössen ein, ergibt sich ein Gleichungssystem für a_0 und d .

- a) $5 = a_2 = a_0 + 2d$ und $7 = a_3 = a_0 + 3d$. Zieht man die erste von der zweiten Gleichung ab, erhält man $2 = d$. Nun löst man $a_2 = a_0 + 2d = a_0 + 4$ nach a_0 auf und erhält $a_0 = a_2 - 4 = 5 - 4 = 1$.
- b) $3d = a_8 - a_5 = 15$, also $d = 5$. Dann ist $a_0 = a_5 - 5d = -8$.
- c) $d = \frac{a_{12} - a_8}{4}$ und $a_0 = a_8 - 8d = a_8 - 2(a_{12} - a_8)$.
- d) $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$ und $a_0 = a_n - nd = a_n - n \frac{a_m - a_n}{m - n}$.
- e) $a_0 + 15d + a_0 + 20d = 300$, also $20 + 35d = 300$, also $35d = 280$, also $d = \frac{280}{35} = 8$.
- f) $\begin{cases} (a_0 + 2d)(a_0 + 3d) = 24 \\ a_0 + 4d = 13 \end{cases}$

Wer dieses Gleichungssystem von Hand lösen will: Verwende das Substitutionsverfahren: Löse die zweite Gleichung nach a_0 auf und ersetze a_0 in der ersten Gleichung entsprechend. Dies liefert eine quadratische Gleichung für d , die man mit der Mitternachtsformel lösen kann.

Die Lösungen dieses Gleichungssystem sind $a_0 = -7$ und $d = 5$ oder $a_0 = -45$ und $d = \frac{29}{2}$.

- g) $\begin{cases} (a_0 + 2d) = 4(a_0 + 6d) \\ (a_0 + 2d) + (a_0 + 3d) = 10 \end{cases}$
 Lösung: $a_0 = \frac{220}{29}$, $d = -\frac{30}{29}$

- h) Es gilt $a_n = a_0 + n \cdot d$. Für n wird nun a_3 eingesetzt, und dieses dann auch mit a_0 und d ausgedrückt (und für die zweite Gleichung a_0 für n eingesetzt): $\begin{cases} a_0 + a_3 \cdot d = a_0 + (a_0 + 3d) \cdot d = 58 \\ a_0 + a_0 \cdot d = 10 \end{cases}$
 Zieht man die zweite Gleichung von der ersten ab, erhält man $3d^2 = 48$, was $d = \pm 4$ ergibt. Also sind die Lösungen erstens $d = 4$ und $a_0 = 2$ und zweitens $d = -4$ und $a_0 = -\frac{10}{3}$. Die zweite Lösung ist streng genommen keine Lösung, weil $a_3 = -\frac{10}{3} + 3 \cdot (-4) = -\frac{46}{3}$ gilt und dann die Gleichung $a_{a_3} = 58$ in der Aufgabenstellung zu $a_{-\frac{46}{3}}$ wird, was keine sinnvolle Bedingung ist, denn eine Folgeglied mit dem Index $-\frac{46}{3}$ existiert nicht. Verallgemeinert man die Folge aber auf die reellen Zahlen (erlaubt also reelle Zahlen als Indizes), so erhält man ganz einfach eine lineare Funktion und auch die zweite Lösung ist sinnvoll.