Lösung zu Aufgabe 17.16 ex-graph-arithmetische-reihe

Auf einer Parabel (= dem Graph einer quadratischen Funktion), denn es gilt

$$\begin{aligned} s_n &= (n+1)\cdot a_0 + \frac{n\cdot(n+1)}{2}\cdot d \\ &= n\cdot a_0 + a_0 + \frac{n^2+n}{2}\cdot d \\ &= \frac{d}{2}\cdot n^2 + \left(a_0 + \frac{d}{2}\right)\cdot n + a_0 \end{aligned}$$

Im Beispiel $a_0 = -2$, $d = 1$ gilt $s_n = \frac{1}{2}\cdot n^2 - \frac{3}{2}\cdot n - 2$, was eine quadratische Funktion in n ist.

Lösung zu Aufgabe 17.18 ex-geometrische-reihe-zweierpotenzen

Nach der allgemeinen Formel erhalten wir

$$\begin{aligned} s_{10} &= \sum_{i=0}^{10} 2^i = g_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1\cdot\frac{1-2^{10+1}}{1-2} = \frac{1-2^{11}}{-1} = 2^{11}-1 = 2048-1 = 2047 \\ s_n &= \sum_{i=0}^{n} 2^i = 1\frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1}-1 \end{aligned}$$

Merke: Die Summe aller Zweierpotenzen von 1 bis 2^n ist $2^{n+1}-1$.

Lösung zu Aufgabe 17.19 ex-geometrische-reihe-potenzen-einhalb

Nach der allgemeinen Formel erhalten wir

$$\begin{aligned} s_{10} &= \sum_{i=0}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^i = g_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{2^{11}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\cdot\left(1-\frac{1}{2^{11}}\right)}{2\cdot\frac{1}{2}} \\ &= 2 - 2\cdot\frac{1}{2^{11}} = 2-\frac{1}{2^{10}} = \frac{2048-1}{1024} = \frac{2047}{1024} \\ s_n &= \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^i = 1\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2-\frac{1}{2^n} = \frac{2^{n+1}-1}{2^n} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 17.20 ex-geoemetrische-reihe-fehlende-groessen

(a)
- $g_n = g_0\cdot q^n = 1\cdot 2^7 = 128$
- $s_n = g_0\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1\cdot\frac{1-2^8}{1-2} = 255$

(b)
- $g_n = g_0\cdot q^n$ also $q^n = \frac{g_n}{g_0} = \frac{13122}{6} = 2187 = 3^n$. $n = 7$ erhält man durch «pröbeln», mit dem Taschenrechner oder später mit $\ln(2187)/\ln(3) = 7$
- $s_n = g_0\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 6\cdot\frac{1-3^8}{1-3} = 19680$

(c)
- $s_n = g_0\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ also $g_0 = s_n\frac{1-q}{1-q^{n+1}} = 398580\frac{1-(-3)}{1-(-3)^{12}} = -3$
- $g_n = g_0\cdot q^n = (-3)\cdot(-3)^{11} = 531441$

(d)
- $g_n = g_0\cdot q^n$ also $q = \sqrt[n]{\frac{g_n}{g_0}} = \sqrt[4]{\frac{5.8564}{4}} \approx 1.1$
- $s_n = g_0\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \approx 4\cdot\frac{1-1.1^5}{1-1.1} = \frac{61051}{2500} = 24.4204$

(e)
- $g_n = g_0\cdot q^n$ also $q = -\sqrt[3]{\frac{625}{40}} = -\frac{5}{2} = -2.5$
- $s_n = g_0\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 40\cdot\frac{1-(-2.5)^4}{1-(-2.5)} = -435$

(f)
- $g_n = g_0\cdot q^n$ also $g_0 = \frac{g_n}{q^n} = \frac{0.16}{0.2^5} = 500$