Lösung zu Aufgabe 17.14 ex-arithmetische-reihe-fehlende-groessen

a) $a_n = a_0 + nd = 1.2 + 19 \cdot 2.1 = 41.1$
$s_n = (n+1) \cdot \dfrac{a_0 + a_n}{2} = 20 \cdot \dfrac{1.2 + 41.1}{2} = 423$

b) $a_n = a_0 + nd$ also $n = \dfrac{a_n - a_0}{d} = \dfrac{-9 - 404}{-7} = 59$
$s_n = (n+1) \cdot \dfrac{a_0 + a_n}{2} = 60 \cdot \dfrac{404 + (-9)}{2} = 11'850.$

c) $\begin{cases} a_n = a_0 + nd \\ s_n = (n+1) \cdot \dfrac{a_0 + a_n}{2} \end{cases}$
Einsezten der gegebenen Grössen liefert:
$\begin{cases} 107 = a_0 + n \cdot 5.2 \\ 123 = (n+1) \cdot \dfrac{a_0 + 107}{2} \end{cases}$
Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen:
$a_0 = -101$ und $n = 40$.

d) $s_n = (n+1) \cdot \dfrac{a_0 + a_n}{2}$. Eingesetzt: $2196 = 61 \cdot \dfrac{a_0 + 0}{2}$. Aufgelöst nach $a_0 = 72$.
$d = \dfrac{a_{60} - a_0}{60} = -\dfrac{6}{5} = -1.2.$

e) $s_n = (n+1) \cdot \dfrac{a_0 + a_0 + nd}{2}$. Eingesetzt: $4059 = (n+1) \cdot \dfrac{1.8 + 1.8 + n \cdot 0.05}{2}$. Aufgelöst nach $n = 368$ oder $n = -441$. Die negative Lösung $n = -441$ kann verworfen werden, da nur natürliche Zahlen als Indizes von Folgen zugelassen sind. $a_{368} = a_0 + 368 \cdot 0.05 = 20.2$.

f) $s_n = (n+1) \cdot \dfrac{a_0 + a_0 + nd}{2}$. Eingesetzt: $207 = 46 \cdot \dfrac{207 + 207 + 45 \cdot d}{2}$. Aufgelöst nach $d = -9$.
$a_{45} = a_0 + 45 \cdot (-9) = -198.$

Lösung zu Aufgabe 17.15 ex-formel-fuer-arithmetische-reihe

Zu testen ist, ob die Folge

$$(a_n) = 3, 8-3 = 5, 15-8 = 7, 24-15 = 9, 35-24 = 11, 48-35 = 13, 63-48 = 15, 80-63 = 17, \ldots$$

arithmetisch ist, was offensichtlich der Fall ist: $a_n = 3 + 2n$.
Damit ergibt sich

$$s_n = (n+1) \cdot \frac{a_0 + a_n}{2} = (n+1) \cdot \frac{3 + 3 + 2n}{2} = (n+1) \cdot \frac{6 + 2n}{2} = (n+1) \cdot (3 + n)$$

Bonus-Teil: Die Folge

$$(a_n) = 12, 9-12 = -3, 7-9 = -2, 6-7 = -1, 6-6 = 0, 7-6 = 1, 9-7 = 2, 12-9 = 3, 16-12 = 4$$

ist zwar nicht arithmetisch, wird aber arithmetisch, wenn man das nullte Folgeglied auf -4 ändert, also die Folge (b_n) mit $a_n = -4 + n$ betrachtet. Die zugehörige Reihe ist

$$t_n = (n+1) \cdot \frac{-4 + (-4) + n}{2} = (n+1) \cdot \left(\frac{n}{2} - 4\right) = \frac{n^2}{2} - \frac{7}{2}n - 4$$

Wegen $(s_n) = a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots$ und $(t_n) = b_0, b_0 + a_1, b_0 + a_1 + a_2, \ldots$ gilt

$$s_n = t_n + a_0 - b_0 = t_n + 12 - (-4) = t_n + 16 = \frac{n^2}{2} - \frac{7}{2}n - 4 + 16 == \frac{n^2}{2} - \frac{7}{2}n + 12 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dies ist die Formel in der Lösung von Aufgabe 17.1.