c)

$$\begin{aligned} p^2x - px &= p^2 - 1 \\ x(p^2 - p) &= p^2 - 1 \end{aligned}$$

Fall 1: Normalfall $p^2 - p \neq 0$, d.h. $p(p-1) \neq 0$, d.h. $p \neq 0$ und $p \neq 1$.
Lösung $x = \frac{p^2-1}{p^2-p} = \frac{(p+1)(p-1)}{p(p-1)} = \frac{p+1}{p}$.
Fall 2: Spezialfall $p = 0$. Man hat die Gleichung $0 = -1$, also $\mathbb{L} = \varnothing$.
Fall 3: Spezialfall $p = 1$. Man hat die Gleichung $0 = 0$, also $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

Lösung zu Aufgabe 6.8 ex-lineare-wurzel-gleichungen

a)

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+1} &= \sqrt{4x-1} && |(\cdot)^2 \quad \textbf{Gewinnumformung!} \\ 3x+1 &= 4x-1 && |-3x+1 \\ 2 &= x \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{3 \cdot 2 + 1} = \sqrt{4 \cdot 2 - 1}$, also $\sqrt{7} = \sqrt{7}$ und damit $\mathbb{L} = \{2\}$.

b)

$$\begin{aligned} \sqrt{x-5} &= \sqrt{7-x} && |(\cdot)^2 \quad \textbf{Gewinnumformung!} \\ x-5 &= 7-x && |+x+5 \\ 2x &= 12 && |:2 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{6-1} = \sqrt{7-6}$, also $\sqrt{1} = \sqrt{1}$ und damit $\mathbb{L} = \{6\}$.

c)

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-6} &= \sqrt{8-5x} && |(\cdot)^2 \\ 2x-6 &= 8-5x && |+5x+6 \\ 7x &= 14 && |:7 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{4-6} = \sqrt{8-10}$, also $\sqrt{-2} = \sqrt{-2}$. Da Wurzeln nicht aus negativen Zahlen gezogen werden können, ist $\mathbb{L} = \{\} = \varnothing$.

d)

$$\begin{aligned} \sqrt{1+2x} &= x+1 && |(\cdot)^2 \\ 1+2x &= x^2+2x+1 && |-2x-1 \\ 0 &= x^2 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{1+2 \cdot 0} = 0+1$, also $\sqrt{1} = 1$, also $1 = 1$, wahre Aussage. Also ist $\mathbb{L} = \{0\}$.

Lösung zu Aufgabe 6.9 ex-lineare-bruch-gleichungen