



20 Kurvendiskussion und Extremalaufgaben

Mit Kurvendiskussion ist die Untersuchung und Beschreibung geometrischer Eigenschaften des Graphen einer Funktion (= der Kurve) gemeint. Dabei geht es zum Beispiel um die Ermittlung interessanter Punkte des Funktionsgraphen (Hoch- und Tiefpunkte, Wendepunkte), aber auch um Null- und Polstellen, eventuelle Symmetrien des Graphen (etwa Spiegelsymmetrie bezüglich der y -Achse) oder um Asymptoten an den Graphen.

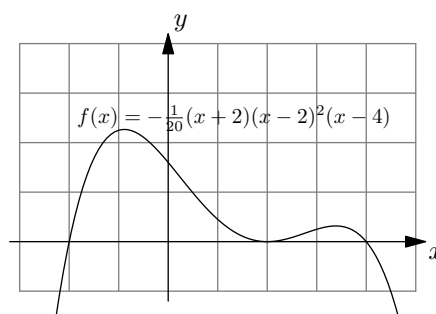
20.1 Nullstellen

Definition 20.1.1 Nullstellen

Die **Nullstellen** einer Funktion f sind jene x -Werte (= Stellen), für die die Funktion Null ist:

$$x \text{ ist Nullstelle von } f \iff f(x) = 0$$

Die Nullstellen von f sind die x -Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von f mit der x -Achse. (Auch Berührungspunkte werden als Schnittpunkte gewertet.)



20.2 Extremalstellen

Definition 20.2.1 Lokale und globale Maxima/Minima; Hoch-/Tiefpunkte; Maximal-/Minimalstellen

Man sagt, dass eine Funktion f an einer Stelle x_0 ein **lokales Maximum** (bzw. **lokales Minimum**) hat, wenn $f(x_0)$ in einer geeignet kleinen Umgebung von x_0 der maximale (bzw. der minimale) Funktionswert von f ist.

Man nennt dann

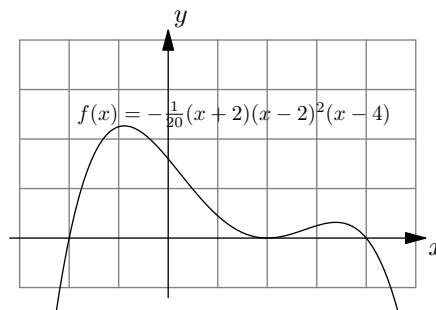
- $(x_0, f(x_0))$ einen **Hochpunkt** (bzw. **Tiefpunkt**).
- x_0 eine **Maximalstelle** (bzw. **Minimalstelle**);
- $f(x_0)$ ein **lokales Maximum** (bzw. **lokales Minimum**);

Man sagt, dass eine Funktion f an einer Stelle x_0 ein **globales Maximum** (bzw. **globales Minimum**) hat, wenn $f(x_0)$ der grösste (bzw. der kleinste) Funktionswert von f auf dem *gesamten* Definitionsbereich ist.

Wenn man von den **Extrempunkten** einer Funktion spricht, meint man damit die Menge aller Hoch- und Tiefpunkte der Funktion.

Mit den **Extremstellen** einer Funktion meint man die Menge aller Maximal- und Minimalstellen.

Mit den **Extrema** einer Funktion meint man die Menge aller lokalen und globalen Maxima und Minima.



Merke 20.2.2

Hat f bei x_0 ein Extremum (d. h. lokales Maximum oder Minimum), so folgt $f'(x_0) = 0$.

Mit anderen Worten: Die Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$ sind die Kandidaten für die Extremstellen von f .

Beispiel 20.2.3. Aus $f'(x_0) = 0$ folgt nicht automatisch, dass x_0 eine Extremalstelle ist. Skizzieren Sie dazu den Graphen der Funktion $f(x) = x^3$.