Merke 20.4.1 Der Infinitesimal-Operator d

In der Notation

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$$

steht das «d» für eine infinitesimale Differenz, d.h. eine von Null verschiedene «Zahl», die aber kleiner als jede reelle Zahl ist. Damit ist «d» keine reelle Zahl. Die Notation kommt vom Differenzenquotienten:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x).$$

Nullstellen einer Funktion (z.B. $f(x) = x^3 - x$) können mit `zeros(x^3-x, x)` bestimmt werden. Das zweite x gibt an, nach welcher Variable die Gleichung gelöst werden soll. Die `zeros`-Funktion erhält man mit `F2` `4`. Der Vorteil von `zeros` gegenüber `solve` ist, dass man eine Liste erhält, die danach weiterverarbeitet werden kann. Z.B. können in diesen Punkten die Ableitungen ausgewertet werden.

Kurvendiskussion mit dem TI-92 Plus

Funktion speichern Z.B. mit `1/(x^2+1) → f(x)`.

Ableitungen speichern `d(f(x),x) → f1(x)` und `d(f1(x),x) → f2(x)`.

Nullstellen bestimmen `zeros(f(x),x) → ns` speichert die Nullstellen von $f(x)$ in der Variablen `ns`. Analog dazu werden die Nullstellen von `f1` (Ableitung) in `es` (Extremalstellenkandidaten) gespeichert und die Nullstellen von `f2` (zweite Ableitung) in `ws` (Wendestellenkandidaten) gespeichert.

Steigungen bestimmen `f1(ns)` und `f1(ws)` liefern die Steigungen in den Null- und Wendestellen.

y-Koordinaten bestimmen `f(es)` und `f(ws)` liefern die y-Koordinaten der Extremal- und Wendestellen.

Aufgabe 20.5 Bestimmen Sie die Nullstellen, Extremalstellen und Wendestellenkandidaten folgender Funktionen mit Hilfe vom TR.
Machen Sie eine Tabelle mit den «interessanten» x-Werten und den entsprechenden Funktions- und Ableitungswerten an diesen Stellen. Skizzieren Sie am Schluss mit den errechneten Daten den Funktionsgraphen, d.h. tragen Sie zuerst die errechneten Punkte mit den entsprechenden Tangenten ein.

a) $f(x) = \frac{5x}{x^2+1} - \frac{1}{2}x$

b) $f(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$

Automatisierung

Um die Berechnungen für die Kurvendiskussion zu automatisieren schreiben wir ein Programm, mit dem Namen `kd` (kurz für Kurvendiskussion): `APPS` `7` (Programm Editor) `3` (New...), Variable `kd`, bestätigen.
Zwischen `Prgm` und `EndPrgm` geben Sie folgendes Programm ein (Ableitungsoperator mit `2nd` `8`):

```
d(f(x),x) → f1(x)
d(f1(x),x) → f2(x)
zeros(f(x),x) → ns
zeros(f1(x),x) → es
zeros(f2(x),x) → ws
```

Man könnte das Programm noch ausbauen und alle Stellen zusammenfassen und die entsprechenden y-Koordinaten und Steigungen ausrechnen:

```
augment(augment(ns,es),ws) → xx
f(xx) → yy
f1(xx) → mm
```