Der Rand des Definitionsbereichs kann ignoriert werden. Geht h gegen Null, wächst r und damit O beliebig.

Mit der zweiten Ableitung könnte überprüft werden, dass es sich wirklich um ein Minimum handelt. Betrachtet man die Funktion $O(h)$ für sehr grosse h, kann man einsehen, dass die Funktion wie eine Wurzelfunktion anwächst (der Term $\frac{2}{h}$ wird beliebig klein).

Zum Vergleich: Oberfläche eines Würfels mit 1 l Inhalt: ✎ .

Kugel mit 1 l Inhalt: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ und $O = 4\pi r^2$. Also $r =$

Aufgabe 20.8 Welche Höhe und Radius hat eine Büchse mit 1 l Volumen und minimaler Oberfläche? Lösen Sie die Aufgabe mit r (anstatt h) als Stellgrösse.

Vereinfachungen beim Bestimmen von Extremalstellen

Sei $f(x)$ eine Funktion, von der man Extremalstellen bestimmen möchte. Bevor man ableitet und die Ableitung Null setzt, kann es sich lohnen, die Funktion durch eine andere Funktion $g(x)$ zu ersetzen, um die Berechnungen zu vereinfachen. Folgende Funktionen $g(x)$ haben dieselben Extremalstellen wie $f(x)$:

- $g(x) = c \cdot f(x)$ für $c \in \mathbb{R}^+$ und $g(x) = f(x) + c$ für $c \in \mathbb{R}$.
- $g(x) = (f(x))^2$ und $g(x) = \sqrt{f(x)}$ wenn $f(x) \geq 0$ auf dem betrachteten Definitionsbereich.

Die zweiten Ersetzungen sind speziell bei Abstandsproblemen interessant, da das Quadrat des Abstands oft eine einfachere Form hat.

Merke 20.5.1 Abstand Punkt-Kurve

Der Abstand von einem Punkt P zu einer Kurve c ist definiert als der kleinste Abstand aller Abstände der Punkte C auf c zum Punkt P.

Aufgabe 20.9 Berechnen Sie den Abstand folgender Parabeln zum Ursprung. Skizzieren Sie jeweils die Parabeln von Hand und schätzen Sie damit den Abstand ab. *Hinweis: Wenn der Scheitelpunkt der Parabel nicht direkt abzulesen ist, berechnen Sie diesen mit Hilfe des Extremums der Parabel.*

Programmieren Sie diesen Typ von Aufgabe auf dem TR, analog zur Kurvendiskussion.

a) $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 1$
b) $f(x) = -\frac{1}{4}(x-1)^2 - 1$
c) $f(x) = x^2 - 2x - 2$
d) $f(x) = -x^2 + x + 2$

Aufgabe 20.10 *Folgende Aufgaben sind aus dem «Mathematik-Repetitorium für den Maturastoff» der Fachgruppe Mathematik der Kantonsschule am Burggraben, St.Gallen.*

a) Aus einem Drahtstück der Länge $L = 180$ cm soll das Drahtmodell eines Quaders geformt werden, der viermal so lang wie breit ist und dessen Volumen maximal werden soll.
b) Einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite $a = 7$ cm ist ein Parallelogramm mit maximalem Inhalt einzubeschreiben, das mit dem Dreieck einen Winkel gemeinsam hat.
c) Im Intervall $[0, \pi]$ soll dem Graphen von $f(x) = 3 \cdot \sin(x)$ ein Rechteck $ABCD$ so einbeschrieben werden, dass die Strecke AB auf der x-Achse und die Punkte C, D auf dem Graphen von f liegen und der Umfang maximal ist.
d) Welcher Punkt auf der Parabel p: $y = \frac{1}{2}x^2$ hat den kleinsten Abstand vom Punkt $P = (6, 0)$?

Aufgabe 20.11 Ziel ist es, die Kurve $h(x)$ (Hüllkurve genannt) zu bestimmen, die bei einem Fadenbild entsteht. *Die Lage ist hier so gewählt, dass die Kurve tatsächlich auch durch einen Funktionsgraphen beschrieben werden kann.*