



3 Exponenten in \mathbb{Z}

Aufgabe 3.1 Benutzen Sie das Potenzgesetz $\frac{a^e}{a^f} = a^{e-f}$ um herauszufinden, wie a^{-1} und a^{-n} (für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}^*$) definiert werden müssen, damit die Potenzgesetze weiterhin gültig bleiben (Permanenzprinzip).



Merke

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Alle Potenzgesetze bleiben auch für negative Exponenten erhalten!

✂ **Aufgabe 3.2** Schreiben Sie als vollständig gekürzten Bruch (oder ganze Zahl).

- a) 10^{-3} b) $(0.25)^{-3}$ c) 4^{-5} d) $(\frac{1}{5})^{-3}$
 e) $\frac{(2^{-2}3^4)^3}{(2^33^{-5})^{-3}}$ f) $(-1)^{-123}$ g) $(-2)^{-2}$

3.1 Wissenschaftliche Darstellung¹

Sehr grosse und sehr kleine Zahlen werden in den Naturwissenschaften mit Hilfe von *Zehnerpotenzen* oder *Vorsätzen* geschrieben.

Entfernung Erde-Sonne \approx 149 600 000 000 m

Entfernung zum nächsten Stern (Proxima Centauri) 4.2 Lichtjahre: \approx 40 Billionen km

Masse eines Elektrons \approx 0.000 000 000 000 000 000 000 000 000 911 kg

Diese Schreibweise gibt zudem einen *Hinweis auf die Genauigkeit* der Angaben. (Für die Beispiele gilt: Entfernung Erde-Sonne 4-stellige Genauigkeit, Entfernung Erde-Sirius 1-stellige Genauigkeit und Masse des Elektrons 3-stellige Genauigkeit.)

Faktor	Vorsatz	Abk.	Beispiel
10^{24}	Yotta-	Y	$3.2 \cdot 10^{24}$ m = 3.2 Ym (Yottameter)
10^{21}	Zetta-	Z	$3.2 \cdot 10^{21}$ m = 3.2 Zm (Zettameter)
10^{18}	Exa-	E	$3.2 \cdot 10^{18}$ m = 3.2 Em (Exameter)
10^{15}	Peta-	P	$3.2 \cdot 10^{15}$ m = 3.2 Pm (Petameter)
10^{12}	Tera-	T	$3.2 \cdot 10^{12}$ m = 3.2 Tm (Terameter)
10^9	Giga-	G	$3.2 \cdot 10^9$ m = 3.2 Gm (Gigameter)
10^6	Mega-	M	$3.2 \cdot 10^6$ m = 3.2 Mm (Megameter)
10^3	Kilo-	k	$3.2 \cdot 10^3$ m = 3.2 km (Kilometer)
10^2	Hekto-	h	$3.2 \cdot 10^2$ m = 3.2 hm (Hektometer)
10^1	Deka-	da	$3.2 \cdot 10^1$ m = 3.2 dam (Dekameter)
10^{-1}	Dezi-	d	$3.2 \cdot 10^{-1}$ m = 3.2 dm (Dezimeter)
10^{-2}	Centi-	c	$3.2 \cdot 10^{-2}$ m = 3.2 cm (Centimeter)
10^{-3}	Milli-	m	$3.2 \cdot 10^{-3}$ m = 3.2 mm (Millimeter)
10^{-6}	Mikro-	μ	$3.2 \cdot 10^{-6}$ m = 3.2 μ m (Mikrometer)
10^{-9}	Nano-	n	$3.2 \cdot 10^{-9}$ m = 3.2 nm (Nanometer)
10^{-12}	Pico-	p	$3.2 \cdot 10^{-12}$ m = 3.2 pm (Picometer)

¹Dieser Abschnitt basiert zum grossen Teil auf Unterrichtsunterlagen diverser Autoren der Kantonsschule am Burggraben.



✂ **Aufgabe 3.11** Auf dem Computer werden Datenspeicher- und Dateigrößen praktisch immer mit binären Prefixen angezeigt (ohne aber die Prefixe Ki, Mi, Gi, Ti, etc. zu verwenden).

- Festplatten- und Speichermedienhersteller verwenden praktisch immer die dezimalen Prefixe (also mit Basis 10). Warum wohl?
- Wie viele Bytes gross ist eine Datei, für deren Grösse genau 1GB (1GiB) angezeigt wird? Geben Sie das Resultat in Exponentialschreibweise mit einer Genauigkeit von 4 Stellen an.
- Wie gross wird dann die Kapazität einer 2TB (2 Terabytes) grossen Festplatte angezeigt? *Man vernachlässige Kapazitätsverluste, die durch Verwaltungsinformation entstehen.*

3.3 Weitere Aufgaben

✂ **Aufgabe 3.12** Vereinfachen Sie und schreiben Sie das Resultat als Produkt von Potenzen, ohne Bruchstriche und Divisionen:

$$\text{a) } \frac{1}{4} \qquad \text{b) } \frac{a^2}{a^{-1}b^3} \qquad \text{c) } \frac{1}{a+b} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \qquad \text{d) } \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{2 \cdot b} \cdot b^a}{a \cdot (a^b \cdot b^{-a})^b} \cdot \frac{1}{a^{-b^2} \cdot b^{a \cdot b} \cdot a^{-2 \cdot b}}$$

✂ **Aufgabe 3.13** Vereinfachen Sie und schreiben Sie das Resultat ohne negative Exponenten mit höchstens einem Bruchstrich (und ohne Divisionszeichen):

$$\text{a) } x^{-1} \qquad \text{b) } 4^{-7} \cdot 2^{13} \qquad \text{c) } \left(\frac{x^{-2}}{y^{-3}} \right)^{-2} \cdot \left(\frac{y^{-2}}{x^{-3}} \right)^{-3} \qquad \text{d) } \frac{12^{-7}}{35^{-8}} \cdot \left(\frac{7}{3} \right)^{-2} \cdot \left(\frac{5}{4} \right)^{-12}$$

✂ **Aufgabe 3.14** Beweisen Sie, dass $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Hinweis: Anstatt gerade/ungerade, untersuchen Sie die Teilbarkeit durch 3.

✂ **Aufgabe 3.15** Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Begründen Sie. Für falsche Aussagen, finden Sie eine kleine Korrektur, um daraus eine wahre Aussage zu machen.

- Die Differenz zweier Zahlen in \mathbb{N} ist auf jeden Fall wieder in \mathbb{N} .
- Das Produkt zweier Zahlen in \mathbb{Z} ist auf jeden Fall wieder in \mathbb{Z} .
- Der Quotient zweier Zahlen in \mathbb{Q} ist auf jeden Fall wieder in \mathbb{Q} .
- Es gibt irrationale Zahlen (d.h. Zahlen in \mathbb{R} , die nicht in \mathbb{Q} sind), deren Produkt in \mathbb{N} ist.
- Die Summe einer irrationalen Zahl (in \mathbb{R} , aber nicht in \mathbb{Q}) und einer rationalen Zahl (in \mathbb{Q}) ist immer irrational.
- Abbrechende Dezimalbrüche sind immer rational.
- Jede rationale Zahl kann als Quotient zweier natürlichen Zahlen geschrieben werden.
- Jede irrationale Zahl kann beliebig genau durch eine natürliche Zahl angenähert werden.

Aufgabe 3.16 Man stelle sich ein unendliches grosses, kariertes Papier vor. Zeigen Sie, dass man sämtliche Häuschen mit den natürlichen Zahlen 0, 1, 2, etc. durchnummerieren kann.



3.4 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

✂ Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

✂ Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**

✂ Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

✂ Lösung zu Aufgabe 3.2 ex-zahlen-hoch-minus

- a) $\frac{1}{1000}$ b) 64 c) $\frac{1}{1024}$ d) 125
e) $\frac{8}{27}$ f) -1 g) $\frac{1}{4}$

✂ Lösung zu Aufgabe 3.3 ex-wort-zu-potenz

- a) = 10^{14} Euro b) = $3 \cdot 10^{-3}$
c) = $4 \cdot 10^{-8}$ d) = $7 \cdot 10^{-13}$

✂ Lösung zu Aufgabe 3.4 ex-sci-zu-dez

- a) 0.0001 b) 299 792 458 c) 0.0224141 d) 10.1325

✂ Lösung zu Aufgabe 3.5 ex-massumwandlungen

- a) $7 \cdot 10^{-2}$ mm = $7 \cdot 10^{-5}$ m b) 10^{-1} nm = 10^{-10} m

✂ Lösung zu Aufgabe 3.6 ex-massumwandlungen-plus

- a) 1 Liter = 10^3 cm³ b) 10 mm² = 10^{-11} km² c) 1 kg/m³ = 1 g/dm³

✂ Lösung zu Aufgabe 3.7 ex-jahr-in-sekunden

1a = $3.1536 \cdot 10^7$ s 10π Ms $\approx 3.1416 \cdot 10^7$ s Differenz: $\approx 1.20073 \cdot 10^5$ s, also weniger als 1% Fehler.

✂ Lösung zu Aufgabe 3.8 ex-vereinfachen-neg-exp

- a) $5^{-4} \cdot 5^{-6} = 5^{-10} = \frac{1}{5^{10}}$
b) $0.6^{-10} \cdot (-0.6)^8 = 0.6^{-10} \cdot (0.6)^8 = 0.6^{-2} = \left(\frac{6}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5^2}{3^2}$
c) $\frac{c^{-2}}{(-b)^{-3}} = c^{-2} \cdot c^5 = c^3$
d) $\frac{b^{n+1}}{(-b)^{-3}} = b^{n+1} \cdot (-b)^3 = -b^{n+1} \cdot b^3 = -b^{n+4}$
e) $\frac{12^{-2x}}{4^{-2x}} = \frac{(3 \cdot 4)^{-2x}}{4^{-2x}} = \frac{3^{-2x} \cdot 4^{-2x}}{4^{-2x}} = 3^{-2x} = \frac{1}{3^{2x}}$
f) $(3^{-2})^{-3} = 3^6$
g) $(-b^0)^{2m-1} = (-1)^{2m-1} = -1$, weil $2m - 1$ ungerade ist.


✂ Lösung zu Aufgabe 3.9 ex-vereinfachen-neg-exp-plus

$$a) \frac{10a^{-3}}{2a^{-5}} \cdot 2a^{-3} = 5a^2 \cdot 2a^{-3} = 10a^{-1} = \frac{10}{a}$$

$$b) \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^{-2}}{\left(\frac{x}{6}\right)^{-3}} = \frac{3^2}{x^2} \cdot \frac{x^3}{6^3} = \frac{3^2 \cdot x}{3^3 \cdot 2^3} = \frac{x}{2^3 \cdot 3} = \frac{x}{24}$$

$$c) 3^{-4x} - (9^{-x})^2 = 3^{-4x} - (3^2)^{-2x} = 3^{-4x} - 3^{-4x} = 0$$

$$d) \text{Beachte, dass } (b-a) = (-1) \cdot (a-b). \text{ Und so } (a-b)^{10} \cdot (b-a)^{10} = (a-b)^{10} \cdot ((-1)(a-b))^{10} = (a-b)^{10} \cdot (-1)^{10} \cdot (a-b)^{10} = (a-b)^{20}$$

✂ Lösung zu Aufgabe 3.10 ex-exponentialgleichungen

$$a) 2^x = (2^3)^{-4} = 2^{-12}, \text{ also } x = -12.$$

$$b) (2^2)^x = (2^3)^{-10} \\ 2^{2x} = 2^{-30}, \text{ also } 2x = -30, \text{ also, } x = -15.$$

✂ Lösung zu Aufgabe 3.11 ex-harddisk-angaben

a) Weil dann die Masszahl grösser wird. Ein z.B. 1 TB ist einiges weniger als 1 TiB.

$$b) 2^{30} \text{ B} \approx 1.074 \cdot 10^9 \text{ B.}$$

$$c) 2 \cdot 10^{12} / 2^{40} \approx 1.81899 \text{ TB (TiB).}$$

✂ Lösung zu Aufgabe 3.12 ex-als-produkt-von-potenzen

$$a) = 4^{-1}$$

$$b) = a^3 b^{-3}$$

$$c) = a^{-1} b^{-1}$$

$$d) = a^b \cdot a^{-1} = a^{b-1}$$

✂ Lösung zu Aufgabe 3.13 ex-als-bruch-ohne-neg-exp

$$a) \frac{1}{x}$$

$$b) \frac{1}{2}$$

$$c) \frac{1}{x^5}$$

$$d) 40$$