



**\* Aufgabe 15.8** Beweisen Sie Satz 1, indem Sie auf der rechten Seite der behaupteten Gleichung  $x_1$  und  $x_2$  durch die Mitternachtsformel ausdrücken und dann ausmultiplizieren und vereinfachen, bis die linke Seite herauskommt.

**\* Aufgabe 15.9** Faktorisieren Sie die folgenden Terme mit Hilfe der Lösungen der entsprechenden quadratischen Gleichung (oder mit Hilfe binomischer Formeln), falls möglich. Überprüfen Sie Ihre Lösung durch Ausmultiplizieren.

Beispiel:  $x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4)$ , weil  $x^2 + x + 12 = 0$  die Lösungen  $x = 3$  und  $x = -4$  hat.

- |                    |                     |                    |
|--------------------|---------------------|--------------------|
| a) $x^2 - 5x + 6$  | b) $x^2 + 10x + 21$ | c) $x^2 - 2x - 15$ |
| d) $2x^2 + 3x - 2$ | e) $x^2 + 3x$       | f) $x^2 - 5$       |
| g) $x^2 - 2x - 4$  | h) $2x^2 + 8x + 8$  | i) $4x^2 - 4x + 8$ |

**⚠** Die Teilaufgaben d), f) und h) zeigen, dass die Faktoren nicht immer die Gestalt  $(x - z)$  für eine ganze Zahl  $z$  haben! Auch wenn dies natürlich bei Aufgaben und Prüfungen in der Schule oft der Fall ist.

**\* Aufgabe 15.10** Beweisen Sie für Terme der Form  $x^2 + bx + c$  das folgende Faktorisierungsverfahren:

«Suche zwei Zahlen so, dass ihr Produkt gleich  $c$  und ihre Summe gleich  $b$  ist. Diese zwei Zahlen  $z_1$  und  $z_2$  haben dann die Eigenschaft, dass  $(x + z_1)(x + z_2)$  die gesuchte Faktorisierung von  $x^2 + bx + c$  ist.»

Beispiel:  $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$  weil  $(-4) \cdot 3 = -12$  und  $-4 + 3 = -1$ .

**Merke 15.4** Faktorisierungsregel

Wenn  $x^2 + bx + c = (x + e)(x + f)$  gilt, dann ist  $b$  die Summe  $e + f$  und  $c$  das Produkt  $e \cdot f$ .

**15.4.1 Gleichungen durch Faktorisieren lösen**

**Merke 15.5** Produkt gleich Null

Ist ein Produkt gleich Null, so muss mindestens einer der beteiligten Faktoren Null sein. Schafft man es, eine Gleichung auf die Form «Produkt gleich Null» zu bringen, so muss man nur die Lösungen der einzelnen Gleichungen «Faktor gleich Null» bestimmen (was meist deutlich einfacher ist).

**\* Aufgabe 15.11**

Lösen Sie die die folgenden Gleichungen, indem Sie sie auf die Form «Produkt = 0» bringen und dann die Faktoren betrachten. Bitte nicht die Mitternachtsformel verwenden! Die Gleichungen sind so gemacht, dass sie leicht auf die Form «Produkt gleich Null» gebracht werden können.

- |                         |                         |                    |
|-------------------------|-------------------------|--------------------|
| a) $x^2 + 11x + 24 = 0$ | b) $(x + 3)(x + 8) = x$ | c) $x^2 + 4x = 32$ |
| d) $3x^2 = 3x + 90$     | e) $x^3 = 2x$           | f) $(x + 2)^2 = 4$ |

**\* Aufgabe 15.12** Lösen Sie die Gleichungen, indem Sie auf die Form «Produkt gleich Null» bringen. Die folgenden Gleichungen haben bis zu 5 Lösungen:

- |                        |                                       |                             |
|------------------------|---------------------------------------|-----------------------------|
| a) $x^3 + 4x^2 = 21x$  | b) $(x^2 + 4x + 3)(x^2 + 6x + 8) = 0$ | c) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$     |
| d) $4x^5 - 4x^3 = 24x$ | e) $(x^2 - 2)(x^3 - x^2 - 30x) = 0$   | f) $(x^2 + 2)(x^3 + x) = 0$ |