



Merke 15.7 Tangente der Normalparabel

Die Tangente an die Normalparabel $y = x^2$ im Punkt (p, p^2) hat die Funktionsgleichung $t(x) = 2px - p^2$.

✂ **Aufgabe 15.16** Beweisen Sie, dass von oben parallel zur y -Achse einfallende Strahlen von der Normalparabel $y = x^2$ zum Brennpunkt $B = (0, \frac{1}{4})$ hin reflektiert werden.

Die Reflexion an einer Kurve stimmt mit der Reflexion an der Tangente im Reflexionspunkt überein; dabei gilt «Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel».

Vorgehen: Sei p die x -Koordinate eines vertikal einfallenden Strahls s . Sei P der Schnittpunkt des Strahls mit der Parabel und sei L der Schnittpunkt des verlängerten Strahls mit der Leitlinie. Sei $M = M_{BL}$ der Mittelpunkt der Punkte B und L . Sei $w = MP$ die Verbindungsgerade von M und P .

Machen Sie eine sorgfältige Skizze der Situation.

Warum genügt es zu zeigen, dass w die Tangente der Normalparabel im Punkt P ist?

✂ **Aufgabe 15.17** Gegeben sind zwei Parabeln, zum einen die Normalparabel $f(x) = x^2$ und zum anderen die Parabel $g(x) = -(x - 2)^2 + \frac{3}{2}$. Bestimmen Sie die Gleichung(en) der gemeinsamen Tangente(n) an die Parabeln und die Koordinaten der Berührungspunkte.

Machen Sie zuerst eine Skizze der Situation, berechnen Sie dann die Tangenten und Berührungspunkte und fertigen Sie danach eine genaue Zeichnung an.

Vorgehen: Finden Sie diejenige Tangente an die Normalparabel, die die zweite Parabel in genau einem Punkt schneidet.

15.7 Funktionsgraphen transformieren

Wenn man eine Funktion beispielsweise als $f(x) = 3x^2 - 7x + 1$ schreibt, so meint man mit ihrem «Funktionsterm» den Ausdruck $3x^2 - 7x + 1$, also die Rechenvorschrift zur Berechnung der Funktion.

15.7.1 Graphen verschieben

Merke 15.8 Verschiebung in y -Richtung

Wird eine (positive) Zahl zu einer Funktion (= einem «Funktionsterm») addiert bzw. von ihr subtrahiert, so verschiebt sich ihr Funktionsgraph entsprechend in y -Richtung nach oben bzw. nach unten.

Beispiel: Der Graph der Funktion $g(x) = x^2 + 3$ entsteht aus dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ durch Verschiebung um 3 Einheiten nach oben.

Merke 15.9 Verschiebung in x -Richtung

Wird x in einer Funktion (= einem «Funktionsterm») überall durch $(x - a)$ ersetzt, so verschiebt sich ihr Funktionsgraph um a Einheiten in x -Richtung (also nach rechts).

Achtung: Konkret bedeutet ein Ersetzen durch $(x + 3)$ eine Verschiebung um 3 Einheiten **nach links**. Beachte: $(x + 3) = (x - (-3))$.

Beispiele:

- Der Graph der Funktion $g(x) = (x - 2)^2$ entsteht aus dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ durch Verschiebung um 2 Einheiten nach rechts (= in x -Richtung).
- Wir nehmen an, dass zwei Brüder dasselbe Wachstumsverhalten haben und im Abstand von 3 Jahren mit derselben Grösse geboren werden. Ist $g(t)$ die Grösse des älteren Bruders zur Zeit t , so ist $g(t - 3)$ die Grösse des jüngeren Bruders zur Zeit t (die Zeit t ist in Jahren gemessen).
Der Graph für das (Grössen-)Wachstum des jüngeren Bruders (= der Graph von $g(t - 3)$) entsteht dann aus dem Graphen für das Wachstum des älteren Bruders (= dem Graphen von $g(t)$) durch Verschieben um 3 Jahre nach rechts.

✂ **Aufgabe 15.18** In den folgenden Teilaufgaben ist jeweils angegeben, wo der Scheitel S einer (in x - oder