BY-SA

Lösung zu Aufgabe 15.7 ex-anzahl-loesungen-quadr-gleichung

Eine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ hat genau dann genau eine Lösung, wenn ihre Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ Null ist. Wir müssen also jeweils die Gleichung $D = 0$ nach t auflösen.

a) $D = 4 - 4t = 0$, also $t = 1$.

b) $D = 25 + 4t = 0$, also $t = -\frac{25}{4}$.

c) $D = t^2 - 4t = t(t-4) = 0$, also $t = 0$ oder $t = 4$
Bemerkung: Die Gleichung $t^2 - 4t = 0$ ist eine quadratische Gleichung **in der Variablen** t und lässt sich auch mit der Mitternachtsformel lösen: $t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{4 \pm 4}{2}$, also $t_1 = 4$ und $t_2 = 0$.

d) $D = 9 + 12t^2 = 0$, also keine Lösung (denn $D = 9 + 12t^2 \geq 9 > 0$ für jede reelle Zahl t). Dies bedeutet, dass die betrachtete quadratische Gleichung stets zwei verschiedene Lösungen x_1 und x_2 hat.
Alternative: Die quadratische Gleichung $12t^2 + 9$ hat keine Lösung, denn ihre Diskriminante $0^2 - 4 \cdot 12 \cdot 9 = -4 \cdot 12 \cdot 9$ ist negativ.

e) $x^2 + x(1-t) + 1 = 0$, also $D = (1-t)^2 - 4 = 0$, d.h. $1 - t = \pm 2$, d.h. $t_1 = -1$, $t_2 = 3$.

f) $2x^2 + tx + (t^2 + 1) = 0$, also $D = t^2 - 4 \cdot 2 \cdot (t^2 + 1) = t^2 - 8t^2 - 8 = -7t^2 - 8 = 0$, also keine Lösung; genauer ist die Diskriminante $D = -7t^2 - 8$ für alle $t \in \mathbb{R}$ negativ, d.h. die Gleichung $2x^2 + tx + t^2 + 1 = 0$ hat für **kein** t eine Lösung.

Lösung zu Aufgabe 15.8 ex-beweis-faktorisierung

$$
\begin{aligned}
&a(x - x_1)(x - x_2) = a\left(x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1 x_2\right) = \\
&= ax^2 - ax\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) + a \cdot \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \\
&= ax^2 - ax\frac{-2b}{2a} + a \cdot \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} = \\
&= ax^2 + bx + a \cdot \frac{4ac}{4a^2} = ax^2 + bx + c
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe 15.9 ex-faktorisieren

a) $(x-2)(x-3)$ b) $(x+3)(x+7)$ c) $(x-5)(x+3)$

d) Die Gleichung $2x^2 + 3x - 2 = 0$ hat die beiden Lösungen $x = -2$ und $x = \frac{1}{2}$. Somit erhalten wir die Faktorisierung $2x^2 - 3x - 2 = 2(x+2)(x - \frac{1}{2})$.

e) $x(x+3)$ f) $\left(x + \sqrt{5}\right)\left(x - \sqrt{5}\right)$ (bin. F.)

g) $x^2 - 2x - 4$ hat die beiden Lösungen $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$. Folglich gilt

$$x^2 - 2x - 4 = \left(x - (1 + \sqrt{5})\right) \cdot \left(x - (1 - \sqrt{5})\right)$$

h) $2(x+2)^2$ (bin. F.)

i) Dieser Term ist nicht faktorisierbar, denn die Gleichung $4x^2 - 4x + 8 = 0$ hat keine Lösung, denn ihre Diskriminante $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 8 < 0$ ist negativ.
Dies verwendet den Satz ganz unten in der Box von Satz 1; Ausklammern von 4 (oder jeder anderen Zahl ungleich Null) ist aber natürlich möglich: $4x^2 - 4x + 8 = 4(x^2 - x + 2)$.

Lösung zu Aufgabe 15.10 ex-faktorisierungsregel

Nehmen wir an, wir haben Zahlen z_1 und z_2 gefunden mit $z_1 + z_2 = b$ und $z_1 z_2 = c$. Dann gilt wie gewünscht

$$(x + z_1)(x + z_2) = x^2 + xz_1 + xz_2 + z_1 z_2 = x^2 + x(z_1 + z_2) + z_1 z_2 = x^2 + xb + c = x^2 + bx + c.$$