Lösung zu Aufgabe 15.17 ex-normalparabel-gemeinsame-tangente

Die Tangente an die Normalparabel hat die Funktionsgleichung $t(x) = 2px - p^2$, wobei p die (noch unbekannte) x-Koordinate des Berührungspunktes ist.

Nun ist p so zu bestimmen, dass sich die Tangente $t(x)$ und die Parabel $g(x)$ in genau einem Punkt schneiden; äquivalent bedeutet dies, dass die Gleichung $t(x) = g(x)$ genau eine Lösung haben soll (denn jede Lösung ist eine x-Koordinate eines Schnittpunkts).

$$\begin{aligned}
t(x) &= g(x) \\
-(x-2)^2 + \frac{3}{2} &= 2px - p^2 \\
-x^2 + 4x - 4 + \frac{3}{2} &= 2px - p^2 && \mid -2px + p^2 \\
-x^2 + (4-2p)x + \left(-\frac{5}{2} + p^2\right) &= 0
\end{aligned}$$

Diese Gleichung für x hat genau dann genau eine Lösung, wenn ihre Diskriminante $D = (4-2p)^2 + 4\left(-\frac{5}{2} + p^2\right)$ Null ist (und dann ist diese Lösung nach der Mitternachtsformel $x = \frac{-(4-2p)}{-2} = 2 - p$). Dies ergibt eine Gleichung für p:

$$\begin{aligned}
(4-2p)^2 + 4\left(-\frac{5}{2} + p^2\right) &= 0 \\
16 - 16p + 4p^2 - 10 + 4p^2 &= 0 \\
8p^2 - 16p + 6 &= 0 \\
4p^2 - 8p + 3 &= 0 \\
p_{1,2} &= \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{8} = \frac{8 \pm 4}{8} = 1 \pm \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Setzen wir diese beiden Lösungen $p_1 = \frac{3}{2}$ und $p_2 = \frac{1}{2}$ in die Tangentengleichung $t(x) = 2px - p^2$ ein, so erhalten wir die beiden Tangenten $t_1(x) = 3x - \frac{9}{4}$ und $t_2(x) = x - \frac{1}{4}$.
Die Berührungspunkte für die Tangente t_1 sind $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ und $\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{4}\right)$, wobei die x-Koordinate des Berührpunkts mit der zweiten Parabel $g(x)$ mit der obigen Formel $x = 2 - p$ zu $2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ berechnet wurde.
Die Berührungspunkte für die Tangente t_2 sind $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ und $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$.

Lösung zu Aufgabe 15.18 ex-normalparabel-verschieben

a) $f(x) = x^2 - 2$

b) $f(x) = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

c) $f(x) = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$

d) $f(x) = (x+2)^2 - 3 = x^2 + 4x + 1$

Lösung zu Aufgabe 15.19 ex-scheitelpunkt-parabel-bestimmen

a) $f(x) = x^2 - 4x + 4 - 4 + 2 = (x-2)^2 - 2$. Also Scheitelpunkt $S = (2, -2)$.

b) $f(x) = x^2 + 12x + 36 - 36 - 5 = (x+6)^2 - 41$. Also Scheitelpunkt $S = (-6, -41)$.

c) $f(x) = x^2 - 6x + 9 - 9 + 6 = (x-3)^2 - 3$. Also Scheitelpunkt $S = (3, -3)$.

d) $f(x) = x^2 - 4x + 4 - 4 = (x-2)^2 - 4$. Also Scheitelpunkt $S = (2, -4)$.