Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

14 Potenzen mit *rationalen* Exponenten

Erinnerung: Bei einer **Potenz** x^y heisst x **Basis** und y **Exponent**.
Bisher wurden nur Potenzen mit *ganzzahligen* Exponenten definiert. Für solche Potenzen kennen wir bereits die folgenden Potenzgesetze.

Merke 14.1 Potenzgesetze (für ganzzahlige Exponenten)

Für alle reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ und alle *ganzen* Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ als Exponenten gelten die folgenden Potenzgesetze:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad (a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Daraus lassen sich die folgenden Gesetze ableiten:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \qquad a^{-m} = \frac{1}{a^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$$

14.0.1 Potenzen mit rationalen Exponenten

Wir möchten nun auch Potenzen mit *rationalen* Exponenten definieren – und zwar so, dass die obigen Gesetze auch für solche Exponenten gültig bleiben.

Aufgabe 14.1

a) Finden Sie heraus, wie $5^{\frac{1}{2}}$ definiert werden sollte, damit die Potenzgesetze weiterhin gültig sind. *Hinweis: Potenzieren Sie mit einem geeigneten natürlichen Exponenten, damit etwas Bekanntes entsteht.*

b) Welche Eigenschaft muss die Zahl $7^{\frac{1}{3}}$ haben?

c) Wie kann $11^{\frac{2}{5}}$ beschrieben werden?

d) Begründen Sie, warum man $5^{\frac{1}{2}}$ nicht als $-\sqrt{5}$ definieren kann. *Hinweis: Betrachten Sie dazu* $\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^2$.

Definition 14.1 «Wurzel ist hoch $\frac{1}{2}$»

Für jede nicht-negative reelle Zahl $a \in \mathbb{R}_0^+$ definieren wir:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

Definition 14.2 n-te Wurzeln

Für jede nicht-negative reelle Zahl $a \in \mathbb{R}_0^+$ ist die ***n*-te Wurzel aus *a***, geschrieben als $\sqrt[n]{a}$ oder $a^{\frac{1}{n}}$, als diejenige nicht-negative Zahl definiert, die mit n potenziert a ergibt.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Mit anderen Worten ist $\sqrt[n]{a}$ die nicht-negative Lösung der Gleichung $x^n = a$.
Beachte: $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$ und $\sqrt[1]{a} = a$.
Beachte: Die n-te Wurzel ist nur für nicht-negative Zahlen definiert und selbst nicht-negativ.

Aufgabe 14.2 Skizzieren Sie in einem Koordinatensystem mit Einheit 10 Häuschen, das den x-Bereich $[0, 2]$ und y-Bereich $[0, 1.5]$ abdeckt, die Graphen der Funktionen $\sqrt[n]{x}$ für $n = 2, 3, 4, 5$. *Beachten Sie, dass alle Graphen bei* $(0, 0)$ *eine vertikale Tangente haben!*