 Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Sie dürfen gerne Hilfsmittel benutzen (TR, GeoGebra, etc.), um die Koordinaten möglichst weniger, aber geeigneter Punkte zu bestimmen, die Sie dann in Ihren Graphen übertragen.

Aufgabe 14.3

a) Finden Sie in der folgenden Liste alle Werte, die gleich $\sqrt[5]{7}^3$ sind:
$\sqrt[3]{5}^7$, $\sqrt[3]{5^7}$, $\sqrt[3]{7}^5$, $\sqrt[3]{7^5}$, $\sqrt[5]{3}^7$, $\sqrt[5]{3^7}$, $\sqrt[5]{7}^3$, $\sqrt[5]{7^3}$, $\sqrt[7]{3}^5$, $\sqrt[7]{3^5}$, $\sqrt[7]{5}^3$ und $\sqrt[7]{5^3}$.
Sie dürfen einen Taschenrechner verwenden (müssen aber nicht).

b) Zeigen Sie: Die dritte Potenz von $\sqrt[3]{a}^5$ ist a^5. Folgern Sie daraus, dass $\sqrt[3]{a}^5 = \sqrt[3]{a^5}$.

c) Zeigen Sie allgemeiner: Die n-te Potenz von $\sqrt[n]{a}^m$ ist a^m. Folgern Sie daraus, dass $\sqrt[n]{a}^m = \sqrt[n]{a^m}$.

Aufgabe 14.4

a) Diesmal ohne Taschenrechner. Welche Werte in folgender Liste sind gleich $\sqrt[5]{7^3}$?:
$\sqrt[10]{7^6}$, $\sqrt[10]{14^6}$, $\sqrt[15]{7^9}$, $\sqrt[6]{8^4}$.
Zeigen Sie Gleichheit oder Ungleichheit, indem Sie die Werte geschickt potenzieren.

b) Zeigen Sie, dass $\sqrt[5]{7^3} = \sqrt[5n]{7^{3n}}$ für alle positiven natürlichen Zahlen n.

c) Zeigen Sie, dass $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$ für alle positiven natürlichen Zahlen n, m, k und alle $a \in \mathbb{R}_0^+$ gilt.

Definition 14.3 Potenzen mit *rationalen* Exponenten

Für jedes $a \in \mathbb{R}_0^+$ und jedes $q \in \mathbb{Q}$ (schreibe $q = \frac{z}{n}$ mit $z \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}^*$) definieren wir $a^q = a^{\frac{z}{n}}$ wie folgt:

$$a^q = a^{\frac{z}{n}} \overset{\text{Definition}}{=} \left(a^z\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^z} \overset{\text{Aufgabe 14.3 (c)}}{=} \left(\sqrt[n]{a}\right)^z = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^z$$

Beachte: Ob die rationale Zahl q gekürzt ist oder nicht, spielt nach Aufgabe 14.4 (c) keine Rolle.
Beachte: Potenzen mit rationalen Exponenten sind **nur für nicht-negative Basen** definiert.
Wer ganz genau ist: Im Fall $a = 0$ muss $q \neq 0$ gelten, d.h. $z \neq 0$, denn 0^0 ist nicht definiert.

Man kann zeigen (siehe Aufgabe 14.5), dass die Potenzgesetze für *rationale* Exponenten weiterhin gelten:

Merke 14.2 Potenzgesetze (für rationale Exponenten)

Für alle nicht-negativen reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ und alle *rationalen* Zahlen $p, q \in \mathbb{Q}$ als Exponenten gelten die folgenden Potenzgesetze:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \qquad (a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p \qquad (a^p)^q = a^{p \cdot q}$$

Daraus lassen sich die folgenden Gesetze ableiten:

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \qquad a^{-p} = \frac{1}{a^p} = \left(\frac{1}{a}\right)^p$$

Aufgabe 14.5

Folgern Sie die Potenzgesetze für rationale Exponenten aus den Potenzgesetzen für ganzzahlige Exponenten und der Definition von Potenzen mit rationalen Exponenten.

Aufgabe 14.6

Vereinfachen Sie jeweils so weit wie möglich:

a) $x^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{2}{3}} x^{\frac{3}{5}}$

b) $x^{-\frac{3}{7}} x^{-2} x^{\frac{17}{7}}$

c) $(xy)^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}}$

d) $\left(z^{\frac{7}{3}}\right)^{-\frac{2}{11}}$

e) $\left(x^{-\frac{5}{7}} y\right)^{\frac{7}{3}}$

f) $\left(z^{\frac{2}{7}} a\right)^{-\frac{7}{5}} a^{\frac{22}{5}} z^{\frac{2}{5}}$

g) $\dfrac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{7}{3}}}$