14.1 Normalform von Wurzeltermen

Definition 14.4 Normalform

Ein Wurzelterm in Normalform sieht wie folgt aus:

$$q_0 + q_1\sqrt{n_1} + q_2\sqrt{n_2} + \ldots + q_m\sqrt{n_m} \qquad \text{mit } q_0, \ldots, q_m \in \mathbb{Q} \text{ und } n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$$

wobei alle n_i voneinander verschieden und quadratfrei sind (d.h. sie haben keine Quadratzahl als Teiler).

Merke 14.5 Normalform

- Wurzeln im Nenner: Erweitern. Beispiel $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$.
- Quadrate unter der Wurzel: Vorziehen. Beispiel $\sqrt{27} = \sqrt{9\cdot 3} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{3} = 3\cdot\sqrt{3}$.

Aufgabe 14.14 Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke in Normalform.
Hinweis: Die Primfaktorzerlegung kann helfen.

a) $\sqrt{240}$ b) $\sqrt{35}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{21}$ c) $\sqrt{8}+\sqrt{32}$ d) $\sqrt{4000}$

e) $\frac{6}{\sqrt{3}}$ f) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{12}}$ g) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{8}-\sqrt{6}\right)$ h) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

Aufgabe 14.15 Bringen Sie die folgenden Ausdrücke auf Normalform. Beispiel:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} = -(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

a) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ b) $\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ d) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

14.2 Wurzelgleichungen

Merke 14.6

Wird eine Gleichung auf beiden Seiten **quadriert**, so können neue Lösungen dazu kommen, die keine Lösung der ursprünglichen Gleichung sind.
Es muss am Schluss also eine **Probe** gemacht werden.

Das Quadrieren beider Seiten einer Gleichung wird bisweilen **Gewinnumformung** oder **Aufpassumformung** genannt.
Die üblichen Gleichungsumformungen, die die Lösungsmenge nicht ändern, werden **Äquivalenzumformungen** genannt.

Aufgabe 14.16 Lösen Sie nach x auf:

a) $\sqrt{x+7} = 7$ b) $\sqrt{x+7} = -7$

c) $\sqrt{x-3} = \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{x+7}$ d) $\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{x-3} = \sqrt{x+7}$

Aufgabe 14.17 Lösen Sie die Gleichungen mit folgender Lösungsstrategie: Nach dem ersten Quadrieren wird noch eine Wurzel übrigbleiben. Formen Sie dann die Gleichung so um, dass die Wurzel alleine auf einer Seite steht und quadrieren Sie nochmals.

a) $\sqrt{4x+5} = \sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}$ b) $\sqrt{x-2} = \sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}$