a) Wenn man die Werte einfach per Taschenrechner ausrechnet, erhält man:
$\sqrt[3]{5}^7 = \sqrt[3]{5^7} \approx 42.749$, $\sqrt[3]{7}^5 = \sqrt[3]{7^5} \approx 25.615$, $\sqrt[5]{3}^7 = \sqrt[5]{3^7} \approx 4.656$, $\sqrt[5]{7}^3 = \sqrt[5]{7^3} \approx 3.214$, $\sqrt[7]{3}^5 = \sqrt[7]{3^5} \approx 2.192$, $\sqrt[7]{5}^3 = \sqrt[7]{5^3} \approx 1.993$
Es gilt also nur $\sqrt[5]{7}^3 = \sqrt[5]{7^3}$; aber Achtung: Genaugenommen könnte es sein, dass diejenigen Stellen, die der Taschenrechner anzeigt, übereinstimmen, die Zahlen aber trotzdem verschieden sind!
Dass die Zahlen wirklich gleich sind, kann man einsehen, indem man die 5-ten Wurzeln «wegpotenziert»: Es gilt $(\sqrt[5]{7}^3)^5 = (\sqrt[5]{7})^{15} = (\sqrt[5]{7}^5)^3 = 7^3$ und $(\sqrt[5]{7^3})^5 = 7^3$, d.h. die beiden Zahlen $\sqrt[5]{7}^3$ und $\sqrt[5]{7^3}$ haben dieselbe 5-te Potenz:

$$(\sqrt[5]{7}^3)^5 = (\sqrt[5]{7^3})^5$$

Zieht man auf beiden Seiten der Gleichung die 5-te Wurzel (was erlaubt ist, denn beide Seiten sind nicht-negativ), so folgt $\sqrt[5]{7}^3 = \sqrt[5]{7^3}$.
Alternativ: Wie oben berechnet man $(\sqrt[5]{7}^3)^5 = (\sqrt[5]{7})^{15} = (\sqrt[5]{7}^5)^3 = 7^3$. Dies bedeutet, dass $\sqrt[5]{7}^3$ eine Zahl ist, deren 5-te Potenz 7^3 ist (ausserdem ist $\sqrt[5]{7}^3$ eine nicht-negative reelle Zahl). Auf Grund der Definiton von $\sqrt[5]{7^3}$ muss also $\sqrt[5]{7}^3 = \sqrt[5]{7^3}$ gelten.
Um z.B. $\sqrt[3]{5}^7 \neq \sqrt[5]{7}^3$ einzusehen, potenzieren wir beide Seiten mit $3 \cdot 5 = 15$ und erhalten einerseits

$$\left(\sqrt[3]{5}^7\right)^{3\cdot 5} = \left(\sqrt[3]{5}\right)^{3\cdot 5\cdot 7} = \left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^3\right)^{5\cdot 7} = 5^{35},$$

also eine ganze Zahl, die nur 5 als Primfaktor enthält, und andererseits

$$\left(\sqrt[5]{7}^3\right)^{5\cdot 3} = \ldots = 7^9,$$

also eine Zahl, die nur 7 als Primfaktor enthält.
Diese beiden Zahlen 5^{35} und 7^9 können nicht gleich sein, weil die Primfaktorzerlegung eindeutig ist und damit eine Zahl nicht zwei verschiedene Primfaktorzerlegungen haben kann. Also gilt $\sqrt[3]{5}^7 \neq \sqrt[5]{7}^3$.

b) $\left(\sqrt[3]{a}^5\right)^3 = \sqrt[3]{a}^{5\cdot 3} = \sqrt[3]{a}^{3\cdot 5} = \left(\sqrt[3]{a}^3\right)^5 = a^5$ oder kurz $\left(\sqrt[3]{a}^5\right)^3 = a^5$.
Zieht man auf beiden Seiten die 3-te Wurzel (oder verwendet die Definition von $\sqrt[3]{a^5}$), so folgt $\sqrt[3]{a}^5 = \sqrt[3]{a^5}$.

c) $\left(\sqrt[n]{a}^m\right)^n = \sqrt[n]{a}^{m\cdot n} = \sqrt[n]{a}^{n\cdot m} = \left(\sqrt[n]{a}^n\right)^m = a^m$.
Das Ziehen der n-ten Wurzel (oder die Definition von $\sqrt[n]{a^m}$) liefert $\sqrt[n]{a}^m = \sqrt[n]{a^m}$.

Lösung zu Aufgabe 14.4 ex-potenzen-von-nten-wurzeln-erweiterte-brueche

a)

- Zu $\sqrt[10]{7^6}$: Potenzieren mit $10 = 5 \cdot 2$ ergibt $\sqrt[10]{7^6}^{10} = 7^6$.
  Da auch $\left(\sqrt[5]{7}^3\right)^{10} = \left(\sqrt[5]{7}^3\right)^{5\cdot 2} = \left(\sqrt[5]{7}\right)^{5\cdot 3\cdot 2} = \left(\sqrt[5]{7}^5\right)^{3\cdot 2} = 7^6$ ergibt, folgt (per Wurzelziehen) $\sqrt[5]{7}^3 = \sqrt[10]{7^6}$.
- Zu $\sqrt[10]{14^6}$: Die 10-te Potenz davon ist 14^6; dies ist verschieden von der 10-ten Potenz von $\sqrt[5]{7}^3$ (siehe voriger Punkt). Also $\sqrt[10]{14^6} \neq \sqrt[5]{7}^3$.
- Zu $\sqrt[15]{7^9}$: Die 15-te Potenz dieser nicht-negativen Zahl stimmt mit der 15-ten Potenz von $\sqrt[5]{7}^3$ überein. Also folgt (per Wurzelziehen) $\sqrt[15]{7^9} = \sqrt[5]{7}^3$.
- Zu $\sqrt[6]{8^4}$: Potenziert man diese Zahl mit $30 = 5 \cdot 6$, so erhält $(8^4)^5 = 8^{4\cdot 5} = 8^{20} = 2^{60}$. Die 30-te Potenz von $\sqrt[5]{7}^3$ ist aber 7^{18}. Also folgt (Primfaktorzerlegung ist eindeutig), dass $\sqrt[6]{8^4} \neq \sqrt[5]{7}^3$.

b) Potenziert man beide Seiten der zu beweisenden Gleichung mit $5n$, so erhält man $\left(\sqrt[5]{7^3}\right)^{5n} = 7^{3n}$. Ziehen der $(5n)$-ten Wurzel liefert die gewünschte Gleichheit.

c) Potenziert man beide Seiten der zu beweisenden Gleichung mit nk, so erhält man $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nk} = a^{mk}$. Ziehen der (nk)-ten Wurzel liefert die gewünschte Gleichheit.