



✂ Lösung zu Aufgabe 14.5 ex-potenzgesetze-rationale-exponenten

Erstes Potenzgesetz, wobei $p = \frac{x}{m}$ und $q = \frac{y}{n}$:

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{x}{m}} \cdot a^{\frac{y}{n}} = a^{\frac{xn}{mn}} \cdot a^{\frac{my}{mn}} = (a^{\frac{1}{mn}})^{xn} \cdot (a^{\frac{1}{mn}})^{my} \text{ Potenzgesetz für ganze Exponenten } (a^{\frac{1}{mn}})^{xn+my} \\ = a^{\frac{xn+my}{mn}} = a^{\frac{x}{m} + \frac{y}{n}}$$

Zweites Potenzgesetz: Beachte, dass $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}$ gilt, denn beide Seiten sind nicht-negativ und die m -te Potenz beider Seiten ist $a \cdot b$ (dies verwendet das Potenzgesetz für ganzzahlige Exponenten).

$$(a \cdot b)^p = (a \cdot b)^{\frac{x}{m}} = (\sqrt[m]{a \cdot b})^x \text{ siehe oben } (\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b})^x \text{ Potenzgesetz für ganze Exponenten } (\sqrt[m]{a})^x \cdot (\sqrt[m]{b})^x \\ = a^{\frac{x}{m}} \cdot b^{\frac{x}{m}} = a^p \cdot b^p$$

Drittes Potenzgesetz: Beachte $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$, denn beide Seiten sind nicht-negativ und ihre mn -te Potenz ist a . (das verwendet ein Potenzgesetz für ganze Exponenten).

$$(a^p)^q = (a^{\frac{x}{m}})^{\frac{y}{n}} = \sqrt[n]{((\sqrt[m]{a})^x)^y} \text{ Potenzgesetz für ganze Exponenten } = \sqrt[n]{(\sqrt[m]{a})^{xy}} \\ = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{xy}}} \text{ siehe oben } \sqrt[nm]{a^{xy}} = a^{\frac{xy}{mn}} = a^{\frac{x}{m} \cdot \frac{y}{n}} = a^{p \cdot q}$$

✂ Lösung zu Aufgabe 14.6 ex-rationale-gesetze-anwenden

Vereinfachen Sie jeweils so weit wie möglich:

- a) $x^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{2}{3}} x^{\frac{3}{5}} = x^{\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{5}} = x^{\frac{13}{30}}$
- b) $x^{-\frac{3}{7}} x^{-2} x^{\frac{17}{7}} = x^{\frac{14}{7}} x^{-2} = x^2 x^{-2} = x^0 = 1$
- c) $(xy)^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} = y^{\frac{1}{3}}$
- d) $(z^{\frac{7}{3}})^{-\frac{2}{11}} = z^{\frac{7}{3} \cdot (-\frac{2}{11})} = z^{-\frac{14}{33}}$
- e) $(x^{-\frac{5}{7}} y)^{\frac{7}{3}} = x^{-\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{3}} y^{\frac{7}{3}} = x^{-\frac{5}{3}} y^{\frac{7}{3}}$
- f) $(z^{\frac{2}{7}} a)^{-\frac{7}{5}} a^{\frac{22}{5}} z^{\frac{2}{5}} = z^{-\frac{2}{5}} a^{-\frac{7}{5}} a^{\frac{22}{5}} z^{\frac{2}{5}} = z^0 a^{\frac{15}{5}} = a^3$
- g) $\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{7}{3}}} = x^{\frac{3}{4} - \frac{7}{3}} = x^{-\frac{19}{12}}$
- h) $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{7}} \cdot \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{5}{3}}} = \frac{x^{\frac{3}{7}}}{y^{\frac{3}{7}}} \cdot \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{5}{3}}} = \frac{x^{\frac{3}{7}} y^{\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{5}{3}} y^{\frac{3}{7}}} = \frac{x^{\frac{3}{7}}}{x^{-\frac{5}{3}}} \cdot \frac{y^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{3}{7}}} = x^{\frac{3}{7} + \frac{5}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3} - \frac{3}{7}} = x^{\frac{44}{21}} \cdot y^{\frac{5}{21}}$
- i) $\left(\frac{b}{ca}\right)^{-\frac{3}{7}} \cdot \frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{1}{5}}} = (b(ca)^{-1})^{-\frac{3}{7}} a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{5}} = (bc^{-1}a^{-1})^{-\frac{3}{7}} a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{5}} = b^{-\frac{3}{7}} c^{\frac{3}{7}} a^{\frac{3}{7}} a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{3}{7} + \frac{2}{3}} a^{\frac{2}{3}} b^{-\frac{3}{7}} b^{\frac{1}{5}} c^{\frac{3}{7}} = a^{\frac{3}{7} + \frac{2}{3}} b^{-\frac{3}{7} + \frac{1}{5}} c^{\frac{3}{7}} = a^{\frac{23}{21}} b^{-\frac{8}{35}} c^{\frac{3}{7}} = \frac{a^{\frac{23}{21}} c^{\frac{3}{7}}}{b^{\frac{8}{35}}}$
- j) $\left(\frac{1}{5-x}\right)^3 \cdot 5^{-2x} = \frac{1^3}{(5-x)^3} \cdot 5^{-2x} = \frac{5^{-2x}}{5^{-3x}} = 5^{-2x+3x} = 5^x$
- k) $\frac{(3x+y^2)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{3x+y^2}} = \frac{(3x+y^2)^{\frac{3}{4}}}{(3x+y^2)^{\frac{1}{4}}} = (3x+y^2)^{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = (3x+y^2)^{\frac{2}{4}} = (3x+y^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3x+y^2}$
- l) $(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}} \cdot (a^2 + 2ab + b^2)^{\frac{2}{3}} = ((a+b)(a-b))^{\frac{2}{3}} \cdot ((a+b)^2)^{\frac{2}{3}} = (a+b)^{\frac{2}{3}} (a-b)^{\frac{2}{3}} \cdot (a+b)^{\frac{4}{3}} = (a+b)^{\frac{6}{3}} (a-b)^{\frac{2}{3}} = (a+b)^2 (a-b)^{\frac{2}{3}}$
- m) $a(a+b^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{b^2}{\sqrt{a+b^2}} = a(a+b^2)^{-\frac{1}{2}} + b^2 \cdot \frac{1}{(a+b^2)^{\frac{1}{2}}} = a(a+b^2)^{-\frac{1}{2}} + b^2(a+b^2)^{-\frac{1}{2}} = (a+b^2)(a+b^2)^{-\frac{1}{2}} = (a+b^2)^1 (a+b^2)^{-\frac{1}{2}} = (a+b^2)^{1-\frac{1}{2}} = (a+b^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a+b^2}$

✂ Lösung zu Aufgabe 14.7 ex-typische-fehler

- a) $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} = (a+b)^{\frac{2}{3}}$
Falsche Regel: $a^m + b^m = (a+b)^m$. (Vielleicht mit der korrekten Regel $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ verwechselt?)
Gegenbeispiel: Für $a = b = 1$ und $m = 2$ gilt $1^2 + 1^2 \neq (1+1)^2$.