b) $a^{\frac{5}{3}} + a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5+1}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$
Falsche Regel: $a^m + a^n = a^{m+n}$. (Vielleicht mit der korrekten Regel $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ verwechselt?)
Gegenbeispiel: Für $a = 1$ und $m = n = 2$ gilt $1^2 + 1^2 \neq 1^{2+2}$.

c) $a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{\frac{3}{7}} = a^{\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{7}} = a^{\frac{4}{7}}$
Falsche Regel: $a^m \cdot a^n = a^{m \cdot n}$. (Vielleicht mit der korrekten Regel $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ verwechselt?) Gegenbeispiel: Für $a = 2$ und $m = n = 1$ gilt $2^1 \cdot 2^1 \neq 2^{1 \cdot 1}$.

d) $(a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{1}{2}})^2 = a^3 + a$
Falsche Regel: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ oder schlimmer gar $(a+b)^m = a^m + b^m$. (Korrekt ist die binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.) Gegenbeispiel: Für $a = b = 1$ und $m = 2$ gilt $(1+1)^2 \neq 1^2 + 1^2$.

e) $\left(z^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{3}{5}} = z^{\frac{2+3}{5}} = z^{\frac{5}{5}} = z^1 = z$
Falsche Regel: $(a^m)^n = a^{m+n}$. (Vielleicht mit der korrekten Regel $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ verwechselt?) Gegenbeispiel: Für $a = 2$ und $m = n = 1$ gilt $(2^1)^1 \neq 2^2$.

f) $\frac{a^{\frac{4}{7}}}{b^{\frac{4}{7}}} = (a-b)^{\frac{4}{7}}$
Falsche Regel: $\frac{a^m}{b^m} = (a-b)^m$. (Vielleicht mit der korrekten Regel $\frac{m^a}{m^b} = m^{a-b}$ verwechselt?) Gegenbeispiel: Für $a = 2$ und $b = 1$ und $m = 1$ gilt $\frac{2^1}{1^1} \neq (2-1)^1$.

g) $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^1}{b^1} = \frac{a}{b}$ (die zweite Gleichheit stimmt)
Sehr abstruser Kürzungsfehler. Ist etwa für $a = 8$ und $b = 1$ falsch, denn $\frac{8^{\frac{2}{3}}}{1^{\frac{2}{3}}} = \frac{(\sqrt[3]{8})^2}{(\sqrt[3]{1})^2} = \frac{2^2}{1^2} = 4 \neq \frac{8}{1}$.

h) $\frac{a^{\frac{13}{7}}}{b^{\frac{4}{7}}} = \frac{a^{\frac{13-4}{7}}}{b^{\frac{4-4}{7}}} = \frac{a^{\frac{9}{7}}}{b^{\frac{0}{7}}} = \frac{a^{\frac{9}{7}}}{1} = a^{\frac{9}{7}}$ (nur die erste Gleichheit ist falsch)
Falsche Regel könnte $\frac{a^m}{b^m} = \frac{a^{m-n}}{b^{m-n}}$ sein. Gegenbeispiel: Für $a = 2$ und $b = 1$ und $m = 2$ und $n = 1$ gilt $\frac{2^2}{1^2} \neq \frac{2^1}{1^1}$.

i) $a^{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^2$
Falsche Regel: $x^{y^z} = (x^y)^z$
Gegenbeispiel: Für $x = z = 2$ und $y = 1$ gilt $2^{1^2} \neq (2^1)^2$. (Kein Gegenbeispiel ist $x = y = z = 2$.)

Lösung zu Aufgabe 14.8 ex-wurzelgesetze-beweisen

a) $\sqrt{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
$(\sqrt{a})^n = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^n = a^{\frac{1}{2} \cdot n} = a^{n \cdot \frac{1}{2}} = (a^n)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^n}$

b) Beispielsweise gelten $\sqrt{1+1} = \sqrt{2} \neq \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$ oder $\sqrt{1+2} = \sqrt{3} < \sqrt{1} + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}$ oder $\sqrt{1+4} = \sqrt{5} < \sqrt{1} + \sqrt{4} = 3$.

c) In einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck mit Katheten a, b und Hypotenuse c gilt nach Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$. Wenn die Wurzel einer Summe die Summe der Wurzeln wäre, würde daraus

$$c = \sqrt{c^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = a + b$$

folgen, d.h. die Hypotenuse wäre so lang wie die Summe der beiden Katheten, d.h. die beiden Katheten müssten auf der Hypotenuse liegen und das Dreieck wäre «flach».
Konkretes Gegenbeispiel: Das Dreieck mit Seitenlängen 3, 4, 5 ist rechtwinklig, denn es gilt $5^2 = 25 = 9 + 16 = 3^2 + 4^2$. Wenn $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ gelten würde, erhielte man $5 = \sqrt{25} = \sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4$!

d) Aus $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ folgt durch Quadrieren (und binomische Formel und erstes Wurzelgesetz) $a + b = a + 2\sqrt{ab} + b$, also $0 = 2\sqrt{ab}$ bzw. $0 = \sqrt{ab}$. Nochmaliges Quadrieren liefert $0 = ab$. Da ein Produkt genau dann Null ist, wenn einer der Faktoren Null ist, folgt $a = 0$ oder $b = 0$.
Da offensichtlich $\sqrt{0+0} = \sqrt{0} + \sqrt{0}$ gilt, sehen wir insgesamt:
Die Gleichheit $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ gilt genau dann, wenn $a = 0$ oder $b = 0$ gilt.