Lösung zu Aufgabe 14.9 ex-nte-wurzelgesetze-beweisen

a) $\sqrt[m]{a\cdot b}=(a\cdot b)^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{m}}\cdot b^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}$
$\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{m}}=\frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$
$(\sqrt[m]{a})^n=\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n=a^{\frac{1}{m}\cdot n}=a^{n\cdot\frac{1}{m}}=(a^n)^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$
Bemerkung: Das letzte Wurzelgesetz haben wir übrigens bereits in Aufgabe 14.3 bewiesen.

b) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{n\cdot m}}=\sqrt[nm]{a}$. Vertauscht man die Rollen von m und n, so erhält man $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[nm]{a}$.

Lösung zu Aufgabe 14.10 ex-wurzeln-in-potenzen-umschreiben

a) $x^2\cdot\sqrt{\sqrt{x}}=x^2\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=x^2\cdot x^{\frac{1}{4}}=x^{\frac{9}{4}}$

b) $\sqrt{\sqrt{x^3}}=\left(\left(x^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{4}}$

c) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x}}}=\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}}=x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=x^{\frac{1}{4}}$

d) $x^2\cdot\dfrac{\sqrt{x^3}\sqrt{\frac{x}{\sqrt{\sqrt{x}}}}}{\sqrt{x^5}\cdot x}=x^2\cdot\dfrac{x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{8}}}}{x^{\frac{5}{2}}\cdot x}=x^2\cdot\dfrac{x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{3}{8}}}{x^{\frac{7}{2}}}=\dfrac{x^{\left(2+\frac{3}{2}+\frac{3}{8}\right)}}{x^{\frac{7}{2}}}=\dfrac{x^{\frac{31}{8}}}{x^{\frac{7}{2}}}=x^{\left(\frac{31}{8}-\frac{7}{2}\right)}=x^{\frac{3}{8}}$

e) $\dfrac{\left(\sqrt{x}\cdot x^{\frac{1}{4}}\right)^3}{\left(\sqrt{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{x^{\frac{9}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}}=x^{\frac{3}{2}}$

f) $\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x}}}}=\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}}=\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot x^{\frac{3}{4}}}}=\sqrt{x\cdot\sqrt{x^{\frac{7}{4}}}}=\sqrt{x\cdot x^{\frac{7}{8}}}=\sqrt{x^{\frac{15}{8}}}=x^{\frac{15}{16}}$

Lösung zu Aufgabe 14.11 ex-zwoelfte-wurzel-aus-zwei
Für den Faktor λ gilt

$$\lambda^{12}=2$$

Um den Exponenten 12 zum Verschwinden zu bringen, werden beide Seiten mit $\frac{1}{12}$ potenziert (was dasselbe ist, wie die 12-te Wurzel zu nehmen):

$$\left(\lambda^{12}\right)^{\frac{1}{12}}=2^{\frac{1}{12}}$$
$$\lambda=2^{\frac{1}{12}}\approx 1.059463$$

Lösung zu Aufgabe 14.12 ex-nte-wurzeln-in-potenzen-umschreiben

a) $\sqrt{\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[2]{x^5}}=\sqrt{(x^2)^{\frac{1}{5}}\cdot(x^5)^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{x^{\frac{2}{5}}\cdot x^{\frac{5}{2}}}=\left(x^{\left(\frac{2}{5}+\frac{5}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(x^{\frac{29}{10}}\right)^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{29}{20}}$

b) $\dfrac{\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x}}}{\frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[8]{x^5}}}=\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{5}{8}}}{x^{\frac{3}{4}}}=x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{-\frac{1}{8}}=x^{\frac{5}{24}}$

c) $\left(\sqrt[5]{x^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{5}}=\left(\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{3}{5}}=x^{-\frac{1}{25}}$

d) $\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{x}}}=x^{\frac{1}{n^3}}$