e) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\frac{\sqrt[4]{x}}{\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[6]{x}}}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\frac{\sqrt[4]{x}}{x^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)}}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{30}}}} = \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{13}{60}}} = x^{\frac{7}{60}}$

f) $\sqrt[n]{x\cdot\sqrt[n]{x\cdot\sqrt[n]{x\cdot\sqrt[n]{x}}}} = \sqrt[n]{x\cdot\sqrt[n]{x\cdot\sqrt[n]{x^{\left(1+\frac{1}{n}\right)}}}} = \sqrt[n]{x\cdot\sqrt[n]{x\cdot\left(x^{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}}}} = \sqrt[n]{x\cdot\sqrt[n]{x\cdot x^{\frac{n+1}{n^2}}}} =$
$\sqrt[n]{x\cdot\left(x^{\frac{n^2+n+1}{n^2}}\right)^{\frac{1}{n}}} = \left(x^{\frac{n^3+n^2+n+1}{n^3}}\right)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{n^3+n^2+n+1}{n^4}}$

Lösung zu Aufgabe 14.13 ex-nte-wurzeln-textaufgaben

(a) Sei p der unbekannte jährliche Zinssatz. Damit ist nach 42 Jahren der Faktor, mit dem das anfängliche Kapital multipliziert wird:

$$\begin{aligned}(1+p)^{42} &= 1+0.233 && \left|(\cdot)^{\frac{1}{42}}\right.\\ 1+p &= 1.233^{\frac{1}{42}} && \left|-1\right.\\ p &= \sqrt[42]{1.233}-1 \approx 0.005 = 0.005\cdot\underbrace{100\cdot\frac{1}{100}}_{=1} = 0.5\cdot\underbrace{\frac{1}{100}}_{=\%} = 0.5\%\end{aligned}$$

Der Zinssatz beträgt also 0.5%.

(b) Das Volumen wird mit Faktor λ^3 multipliziert. Wir suchen also λ so, dass:

$$\begin{aligned}\lambda^3 &= \frac{1}{2} && \left|(\cdot)^{\frac{1}{3}}\right.\\ \lambda &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{0.5}\approx 0.7937\end{aligned}$$

D.h. Ein Würfel mit Kantenlänge ca. 7.94 cm Kantenlänge hat ein Volumen von 0.5 l.

(c) In reiner Stimmung hat der Ton e2 die Frequenz $\frac{3}{2}\cdot 440 = 660$ Hertz.

Das Frequenzverhältnis zweier benachbarter Halbtöne ist bei der temperierten Stimmung $\sqrt[12]{2}$. Der temperierten Quinte (7 Halbtöne) entspricht also ein Verhältnis von $\left(\sqrt[12]{2}\right)^7 = 2^{\frac{7}{12}} \approx 1.498307$. In temperierter Stimmung hat der Ton e2 also die Frequenz $2^{\frac{7}{12}}\cdot 440 \approx 659.25508$ Hertz.

Der Quotient dieser beiden Frequenzen ist

$$\frac{\text{Frequenz reines e2}}{\text{Frequenz temperiertes e2}} = \frac{\frac{3}{2}\cdot 440}{2^{\frac{7}{12}}\cdot 440} = \frac{\frac{3}{2}}{2^{\frac{7}{12}}} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{2^{\frac{7}{12}}} \approx 1.00112989$$

Die bedeutet, dass das reine e2 um 0.112989% höher ist als das temperierte e2. D.h. das e2 auf der Violine ist etwa 1‰ (= ein Promille) grösser das e2 auf dem Klavier.

Zusatzaufgabe: Beim Kammer-a von 440 Hz ergibt sich für das reine e2 eine Frequenz von 660 Hz, für das temperierte e2 $440\cdot 2^{\frac{7}{12}} \approx 659.26$ *Hz. Zeichnet man die entsprechenden Schwingungen in GeoGebra, liest man eine Frequenz der Schwebung von ca.* $\frac{1}{1.4}\approx 0.7$ *ab. Man kann auch die Zeit berechnen, nachdem der Unterschied der Winkel beider Schwingungen genau 360° beträgt:*

$$\begin{aligned}t\cdot 660\cdot 360^\circ &= t\cdot 440\cdot 2^{\frac{7}{12}}\cdot 360^\circ + 360^\circ && \left|:360^\circ\right.\\ t\cdot 660 &= t\cdot 440\cdot 2^{\frac{7}{12}} + 1 && \left|-t\cdot 440\cdot 2^{\frac{7}{12}}\right.\\ t\cdot\left(440\cdot 1.5 - 440\cdot 2^{\frac{7}{12}}\right) &= 1\\ t\cdot 440\cdot\left(1.5-2^{\frac{7}{12}}\right) &= 1 && \left|:\left(440\cdot\left(1.5-2^{\frac{7}{12}}\right)\right)\right.\\ t &= \frac{1}{440\cdot\left(1.5-2^{\frac{7}{12}}\right)} \approx 1.342\end{aligned}$$

D.h. die Schwebung hat eine Periode (Schwingungsdauer) von 1.342 s, d.h. der Kehrwert davon ist die Frequenz, also $440\cdot\left(1.5-2^{\frac{7}{12}}\right)\approx 0.7448$ *Hz.*