d)

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{x-3} &= \sqrt{x+7} && |(\cdot)^2\\
\frac{4}{2}\cdot(x-3) &= x+7\\
2x-6 &= x+7 && |-x+6\\
x &= 13
\end{aligned}$$

Probe: $\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{10} = \frac{2\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{10} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{10} = \sqrt{20}$
Damit ist $x = 13$ eine Lösung der Ursprungsgleichung.

Lösung zu Aufgabe 14.17 ex-wurzelgleichungen-hard

(a)

$$\begin{aligned}
\sqrt{4x+5} &= \sqrt{x-1}+\sqrt{x+4} && |(\cdot)^2\\
4x+5 &= x-1+x+4+2\sqrt{(x-1)(x+4)} && |-2x-3\\
2x+2 &= 2\sqrt{x^2+3x-4} && |:2\\
x+1 &= \sqrt{x^2+3x-4} && |(\cdot)^2\\
x^2+2x+1 &= x^2+3x-4 && |-x^2-2x+4\\
5 &= x
\end{aligned}$$

Eingesetzt erhält man eine wahre Aussage (nämlich $\sqrt{25} = \sqrt{4}+\sqrt{9}$), $x = 5$ ist also die Lösung der Gleichung.

(b)

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-2} &= \sqrt{x+3}+\sqrt{x-1} && |(\cdot)^2\\
x-2 &= x+3+x-1+2\sqrt{(x+3)(x-1)} && |-2x-2\\
-x-4 &= 2\sqrt{x^2+2x-3} && |(\cdot)^2\\
x^2+8x+16 &= 4x^2+8x-12 && |-x^2-8x+12\\
28 &= 3x^2 && |:3\\
\frac{28}{3} &= x^2\\
x &= \pm\sqrt{\frac{28}{3}}
\end{aligned}$$

Der negative Lösungskandidat scheidet aus, weil für ihn $\sqrt{x-1}$ nicht definiert ist. Der positive Lösungskandidat ist etwas grösser als 3 (da $\frac{28}{3} > 9$), und damit sind immerhin alle Zahlen unter den Wurzeln der Ausgangsgleichung positiv.

Trotzdem behaupten wir, dass $x = \sqrt{\frac{28}{3}}$ keine Lösung der Ausgangsgleichung ist!

Heuristisch: Wenn man die Gleichung im Taschenrechner testet, kommen links und rechts sehr verschiedene Werte heraus. Dies wird aber streng genommen erst dann eine mathematisch saubere Begründung, wenn man weiss, dass der Taschenrechner auf genügend viele Stellen genau gerechnet hat.

1. mathematisch sauberer Weg (um zu sehen, dass die Ausgangsgleichung keine Lösung hat): Wenn die Ausgangsgleichung eine Lösung hat, so müssen alle Ausdrücke unter den Wurzelzeichen ≥ 0 sein, d.h. $x \geq 2$ gelten. Für solche x gilt aber (wegen $x-2 < x+3$) stets $\sqrt{x-2} < \sqrt{x+3}$ und erst recht $\sqrt{x-2} < \sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}$. Also hat die Gleichung keien Lösung. (Alternativ gilt auch $\sqrt{x-2} < \sqrt{x-1} < \sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}$.)