Lösung zu Aufgabe 14.24 ex-potenzfunktionen-spinne-analysieren

Unten ist beispielhaft die Lösung für $p = -2$ erklärt.

$p = 1$	$(-1.5, -1.5)$ und $(1.5, 1.5)$
$p = 2$	$(-1.5, 2.25)$ und $(1.5, 2.25)$
$p = 3$	$\left(-\sqrt[3]{3}, -3\right)$ und $\left(\sqrt[3]{3}, 3\right)$
$p = -1$	$\left(-\frac{1}{3}, -3\right)$ und $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ und $\left(-1.5, -\frac{2}{3}\right)$ und $\left(1.5, \frac{2}{3}\right)$
$p = -2$	$\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, 3\right)$ und $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, 3\right)$ und $\left(-1.5, \frac{4}{9}\right)$ und $\left(1.5, \frac{4}{9}\right)$
$p = \frac{1}{2}$	$\left(1.5, \sqrt{1.5}\right)$
$p = \frac{1}{3}$	$\left(1.5, \sqrt[3]{1.5}\right)$
$p = -\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{9}, 3\right)$ und $\left(1.5, \frac{1}{\sqrt{1.5}}\right)$

Lösung für $p = -2$, d.h. $f(x) = x^{-2}$.

- Linke Seite des Rechtecks, d.h. $x = -1.5$. Dann gilt $f(x) = (-1.5)^{-2} = (-\frac{3}{2})^{-2} = (-\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$. Wegen $-3 < \frac{4}{9} < 3$ liegt der zugehörige Punkt $(-1.5, \frac{4}{9})$ wirklich auf der linken Rechtecksseite.
- Rechte Seite des Rechtecks, d.h. $x = 1.5$. Dann gilt $f(x) = (1.5)^{-2} = (\frac{3}{2})^{-2} = (\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$. Wegen $-3 < \frac{4}{9} < 3$ liegt der zugehörige Punkt $(-1.5, \frac{4}{9})$ wirklich auf der rechten Rechtecksseite.
- Untere Seite des Rechtecks: Gesucht ist x mit $f(x) = -3$, d.h. $x^{-2} = -3$, d.h. $\frac{1}{x^2} = -3$, d.h. $x^2 = -\frac{1}{3}$. Die Gleichung hat keine Lösung (denn Quadrate sind stets positiv oder Null). Also liegt kein Punkt des Graphen auf der unteren Seite des Rechtecks.
- Oberer Rand des Rechtecks: Gesucht ist x mit $f(x) = 3$, d.h. ähnlich wie oben umgeformt $x^2 = \frac{1}{3}$, d.h. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Wegen $-1.5 < \pm\frac{1}{\sqrt{3}} < 1.5$ liefert dies zwei Punkte auf der oberen Rechtecksseite.

Lösung zu Aufgabe 14.25 ex-potenzfunktionen-grosse-n

Zuerst ist zu bemerken, dass diese Funktionen immer durch den Punkt $(1, 1)$ gehen, egal was n für einen Wert hat. Für positive Exponenten gehen die Funktionen durch den Punkt $(0, 0)$.

a) Auf $]-1, 1[$ ist die Funktion fast 0, dann steigt sie sehr steil durch den Punkt $(-1, 1)$ bzw. $(1, 1)$ an. Es ergibt sich eine Art «eckiges U».

b) Auf $]-1, 1[$ ist die Funktion fast 0. Im positiven Bereich steigt die Funktion durch den Punkt $(1, 1)$ sehr steil an, im negativen Bereich fällt die Funktion durch $(-1, -1)$ sehr steil ab.

c) Die Funktion ist praktisch 1 für x-Werte grösser Null. Bei Null fällt die Funktion sehr steil auf $(0, 0)$ ab. Es ergibt sich eine Art «liegendes L»; beachte aber, dass die Funktion für sehr grosse Werte von x beliebig gross (beispielsweise wird für $n = 1000$ der Wert 10 bei 10^{1000} angenommen).

d) Auf $]-1, 1[$ ist der Funktionswert sehr gross. Bei $(-1, 1)$ und $(1, 1)$ fällt der Funktionswert sehr schnell auf fast 0 ab. Ausserhalb von $[-1, 1]$ ist der Funktionswert nahe bei Null. Es ergeben sich «zwei L».

e) Wie d), ausser dass die Funktion im negativen Bereich selbst negativ ist (und das «L» nach unten an der x-Achse gespiegelt wird).

f) Die Funktion ist nahezu konstant 1, ausser gegen Null hin steigt die Funktion steil an und strebt gegen unendlich (und nicht für $x = 0$ nicht definiert). Für sehr grosse x geht die Funktion langsam gegen 0 (beispielsweise wird für $n = 1000$ der Wert 0.1 bei 10^{1000} angenommen)

Lösung zu Aufgabe 14.26 ex-potenzfunktionen-intervall-bijektion

Die Funktion $f(x)$ sollte erst langsamer ansteigen als $f(x) = x$, dann gegen $x = 1$ schneller, aber immer noch durch den Punkt $(1, 1)$ gehen.

Dazu bieten sich Potenzfunktionen an, z.B. $f(x) = x^2$ oder $f(x) = x^3$. Was besser passt, muss ausprobiert und hängt nicht zuletzt von den verwendeten Bauteilen und der Umgebungshelligkeit ab.

Lösung zu Aufgabe 14.29 ex-volumen-hyperwuerfel-strecken

a) 1 m.

b) $s^4 = 0.5$, also $s = \sqrt[4]{0.5} \approx 0.8409$ m.

c) Das Volumen wird mit λ^4 multipliziert. Also $\lambda^4 = 100$ und damit $\lambda = \sqrt[4]{100} = \sqrt{10} \approx 3.1623$.