e) Machen Sie eine gute Skizze, um die Beschreibung zu verstehen! Die Punkte O, P_f, P_h und P_g bilden ein Rhombus (gleichseitiges Parallelogramm). Sei E der Diagonalenschnittpunkt. $\triangle OP_fE$ ist rechtwinklig mit $\angle P_fOE = \frac{\varphi}{2}$. Die Strecke OE ist Ankathete, OP_f die Hypotenuse mit Länge 1. Damit ist $\overline{OE} = |\cos(\varphi/2)|$ die Hälfte vom gesuchten Radius. Damit ist die Amplitude also $|2 \cdot \cos(\varphi/2)|$.
Alternativlösung: Zum Zeitpunkt $x = 0$ gilt $P_f = (1, 0)$, $P_g = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ und somit $P_h = (1 + \cos(\varphi), \sin(\varphi))$. Die Amplitude ist der Abstand des Punktes P_h vom Ursprung $(0, 0)$, also nach Pythagoras

$$\sqrt{(1+\cos(\varphi))^2 + (\sin(\varphi))^2} = \sqrt{1 + 2\cos(\varphi) + (\cos(\varphi))^2 + (\sin(\varphi))^2} = \sqrt{1 + 2\cos(\varphi) + 1} = \sqrt{2 + 2\cos(\varphi)}$$

Bemerkung: Man kann mit Hilfe der sogenannten Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen zeigen, dass $2 + 2\cos(\varphi) = 4\cos^2(\varphi/2)$ gilt und somit beide Lösungswege dasselbe Resultat liefern.

f) Das ist für 120° und 240° der Fall, wenn der Rhombus aus zwei gleichseitigen Dreiecken besteht.

Lösung zu Aufgabe 13.19 ex-schwingungen-ueberlagern-textaufgben

a) Die Funktion, die die Spannung in Volt zur Zeit t in Sekunden beschreibt ist

$$y(t) = 310 \cdot \sin(t \cdot 50 \cdot 360°).$$

Die Differenz zwischen obiger Funktion und einer Schwingung mit Phase 120° ist wie die Summe mit einer Schwingung mit Phase $-60°$. Im entsprechenden Rhombus erhält man die neue Amplitude $a \cdot \cos(30°) \cdot 2 = a \cdot \sqrt{3}$, wobei a die ursprüngliche Amplitude ist. Daraus ergibt sich «Gleichstromäquivalent» von $220 \cdot \cos(30°) \cdot 2 = 220 \cdot \sqrt{3} \approx 380$ [V].

Lösung zu Aufgabe 13.23 ex-trigo-repe

a) Schätzung mit dem TR überprüfen.

b) Siehe a).

c) Erste Gleichung ist falsch (könnte mit einem negativen Vorzeichen auf einer Seite korrigiert werden). Zweite Gleichung ist richtig (die Phase vom cos ist 90°. Die dritte ist falsch, die Steigung ändert das Vorzeichen, wenn man an der x-Achse spiegelt. Die vierte ist somit richtig.

d) Wenn l die Länge (in Metern) ist (Hypotenuse), dann gilt $\sin(3.5°) = \frac{0.5}{l}$ und damit $l = \frac{0.5}{\sin(3.5°)} \approx 8.190$. Die Rampe müsste also mindestens knapp 8.2 m lang sein.

e) Der (kleinere der beiden) Schnittwinkel ist doppelt so gross wie der kleinere Winkel im rechtwinkligen Dreieck, das aus einer der Diagonlen und den beiden Rechteckseiten gebildet wird. Also $\alpha = 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 53.13°$.

f) Der Winkel α ist entweder $\arctan(2) \approx 63.43°$ oder $\arctan(2) + 180° \approx 243.43°$ (oder einer dieser beiden Winkel plus ein ganzzahliges Vielfaches von 360°). Daraus ergeben sich die ungefähren Sinus- und Cosinuswerte von entweder 0.8944 und 0.4472 oder -0.8944 und -0.4472.
Als alternativen Lösungsweg könnte man auch mit zwei Unbekannten $y = \sin(\alpha)$ und $x = \cos(\alpha)$ folgendes System lösen: $x^2 + y^2 = 1$ und $\frac{y}{x} = 2$ und als exakte Lösungen
$y = \frac{2}{\sqrt{5}}$ und $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ oder $y = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ und $x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

g) Machen Sie eine gute Skizze und stellen Sie fest, dass sich die beiden Diagonalen rechtwinklig schneiden (denn zwei gegenüberliegende Ecken müssen auf der Mittelsenkrechten der anderen beiden Ecken liegen). Damit ergibt sich die andere Diagonale mit Hilfe des Satzes von Pythagoras: $f = 2\sqrt{s^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2} \approx 13.23$. Für den einen Winkel α betrachtet man ein rechtwinkliges Dreieck, das aus einer Seite und zwei halben Diagonalen gebildet wird. Dort gilt: $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{e}{2}}{s}$ und damit $\frac{\alpha}{2} = \arccos\left(\frac{\frac{e}{2}}{s}\right) \approx 41.41°$. Damit ist $\alpha \approx 82.82$. Daraus ergibt sich $\beta = 180° - \alpha \approx 97.18°$.

h) (Egal, welche der vier Raumdiagonalen und welche der sechs Flächen man nimmt, es kommt aus Symmetriegründen stets derselbe Winkel heraus.)
Sei s die Seitenlänge unseres Würfels und ε der gesuchte Winkel. Im Würfel kann ein rechtwinkliges «Stützdreieck» gezeichnet werden mit der Raumdiagonalen als Hypotenuse, einer Flächendiagonalen (der Länge $\sqrt{2} \cdot s$) als langer Kathete und einer Würfelseite (der Länge s) als kurzer Kathete. Damit gilt $\tan(\varepsilon) = \frac{s}{\sqrt{2} \cdot s} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Und somit ist $\varepsilon = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 35.26°$.