15.2 Vektorgeometrie in der Ebene

Aufgabe 15.12 Bestimmen Sie zu jedem Vektor alle Vektoren derselben Länge, die senkrecht auf dem betrachteten Vektor stehen.

a) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

Merke 15.7 Senkrechte Vektoren in der Ebene

Gegeben ist ein Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Einen gleich langen Vektor $\vec{u}$ senkrecht zu $\vec{v}$ erhält man, wenn man die Komponenten vertauscht und danach bei einer Komponente das Vorzeichen ändert. Ändert man es bei der ersten Komponente, bewirkt dies eine Drehung um $+90°$ (d.h. in der Richtung von x nach y). Ändert man nach dem Vertauschen das Vorzeichen der zweiten Komponente, bewirkt dies eine Rotation um $-90°$. Konkret:

$$\vec{u}_{+90°} = \begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{u}_{-90°} = \begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}$$

Aufgabe 15.13 Von einem gleichseitigen Dreieck in der x/y-Ebene kennt man zwei Punkte A und B. Berechnen Sie die Koordinaten des dritten Punktes C.

a) $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ b) $A = (3,2)$, $B = (4,2)$ c) $A = (0,1)$, $B = (0,2)$
d) $A = (-1,0)$ $B = (3,3)$ e) allgemein.

Aufgabe 15.14 Gegeben sind zwei Kreise k_A und k_B durch ihre Zentren A und B und ihre Radien r_A und r_B. Ziel ist es, die Koordinaten der Schnittpunkte der Kreise zu bestimmen.

a) Was sind die Bedingungen an den Abstand $|\vec{AB}|$ und die Radien, damit es überhaupt Schnittpunkte gibt?
b) Lösen Sie für den Fall $A = (0,0)$, $B = (4,0)$, $r_A = 2$ und $r_B = 3$.
c) Lösen Sie für den Fall $A = (0,0)$, $B = (d,0)$ mit r_A und r_B allgemein.
d) Verallgemeinern Sie die Lösung von c) auf den gänzlich allgemeinen Fall.

15.2.1 Rotation

Aufgabe 15.15 Gesucht sind die Komponenten eines 2-dimensionalen Vektors mit Länge 1 und Winkel α (gemessen von der positiven x-Achse in Richtung der y-Achse).

a) $\alpha = 90°$ b) $\alpha = 225°$ c) $\alpha = 150°$ d) $\alpha = 72°$ e) α allgemein.

Aufgabe 15.16 Es sollen die Koordinaten der Eckpunkte eines regulären Polygons (alle Seiten bzw. Winkel gleich lang bzw. gross) bestimmt werden, und zwar so, dass $O = (0,0)$ das Zentrum des Polygons ist und dass der Abstand der Eckpunkte von O genau 1 beträgt.

a) Quadrat b) Gleichseitiges Dreieck c) Pentagon (Fünfeck) d) n-gon (Vieleck mit n Ecken).

Aufgabe 15.17 Gegeben ist ein allgemeiner Punkt $P = (x,y)$ und ein Drehwinkel α. Gesucht sind die Koordinaten von P', dem Bild von P nach der Drehung um den Ursprung mit dem Winkel α.

a) Machen Sie eine grosszügige Skizze der Situation (halbe Seite).
b) Zeichnen Sie die Einheitsvektoren $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ ein, sowie ihre Bilder $\vec{e_1'}$ und $\vec{e_2'}$ nach der Drehung.
c) Geben Sie die Komponenten von $\vec{e_1'}$ und $\vec{e_2'}$ an.
d) Schreiben Sie den Vektor $\vec{OP}$ als Summe von Vielfachen von $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$.
e) Überzeugen Sie sich, dass sich $\vec{OP'}$ analog zu $\vec{OP}$ schreiben lässt und fassen Sie zusammen, um die Koordinaten von P' zu erhalten.