



- c) Sei C ein Schnittpunkt. Mit der Höhe $h = h_c$ und dem Höhenfusspunkt H entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke, $\triangle AHC$ und $\triangle CHB$. Seien $p = \overline{AH}$ und $q = \overline{HB}$. Damit ist $p + q = d$, bzw. $q = d - p$. Die Koordinaten von C sind also $C = (p, \pm h)$.
In den rechtwinkligen Dreiecken gilt $r_A^2 = p^2 + h^2$ und $r_B^2 = q^2 + h^2$. Löst man nach h auf und setzt gleich erhält man: $r_A^2 - p^2 = r_B^2 - q^2$. Ersetzt man noch q erhält man:

$$\begin{aligned} r_A^2 - p^2 &= r_B^2 - (d - p)^2 \\ r_A^2 - p^2 &= r_B^2 - d^2 + 2dp - p^2 && | + p^2 + d^2 - r_B^2 \\ r_A^2 - r_B^2 + d^2 &= 2dp && | : 2d \\ p &= \frac{r_A^2 - r_B^2 + d^2}{2d} \end{aligned}$$

Damit ist die Strecke \overline{AH} bekannt. Die Höhe ergibt sich durch Einsetzen:

$$h^2 = r_A^2 - p^2 \quad h = \pm \sqrt{r_A^2 - p^2}$$

- d) Man setzt $d = |\vec{AB}|$ und berechnet wieder p und h . Anstatt um p Einheiten in x -Richtung muss p Einheiten in die Richtung von \vec{AB} gegangen werden.
Sei $\vec{v} = \vec{AB}$ und \vec{u} der zu \vec{v} rechtwinklige Vektor mit gleicher Länge. Dann ist

$$\vec{OC} = \vec{OA} + p \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \pm h \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

✂ Lösung zu Aufgabe 15.15 ex-einheitskreis-vektoren

a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Katheten im $45^\circ/45^\circ/90^\circ$ Dreieck mit Hypotenuse 1: $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

c) Gleichseitige Dreieck über $(0, 0) - (0, 1)$: $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

d) $\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(72^\circ) \\ \sin(72^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{4} \\ \frac{2(5+\sqrt{5})}{4} \end{pmatrix}$ (Mit dem Taschenrechner)

e) Koordinaten eines Punktes auf dem Einheitskreis: $\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$.

✂ Lösung zu Aufgabe 15.16 ex-regulaere-polygone

Die Punkte dieser Vielecke liegen auf dem Einheitskreis. Mit \cos und \sin lassen sich die Punkte mit dem Winkel beschreiben. Der allgemeine Fall ist also

$$P_i = \left(\cos \left(360^\circ \cdot \frac{i}{n} \right), \sin \left(360^\circ \cdot \frac{i}{n} \right) \right) \quad \text{mit } i = 0 \dots (n - 1)$$

- a) $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$
 b) $(1, 0), \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$
 c) $(1, 0), (\cos(72^\circ), \sin(72^\circ)), \text{ etc.}$

✂ Lösung zu Aufgabe 15.17 ex-rotations-formel-herleiten

c) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

d) $\vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$

e) $\vec{OP}' = x\vec{e}_1' + y\vec{e}_2' = x \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos(\alpha) - y \sin(\alpha) \\ x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha) \end{pmatrix}$