Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

16 Vektorgeometrie

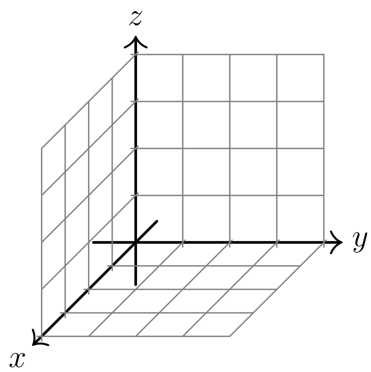
Die Vektorgeometrie (oder analytische Geometrie) beschreibt geometrische Objekte im Raum oder der Ebene durch Gleichungen. Beispiele für geometrische Objekte sind Geraden, Ebenen, Kurven oder gekrümmte Flächen im Raum, etwa die Oberfläche einer Kugel. Viele geometrische Probleme kann man mit Hilfe der Vektorgeometrie rechnerisch lösen. Dabei werden sich bereits behandelte Begriffe und Konzepte (aus Geometrie, Trigonometrie und den Kapiteln über Gleichungen und Funktionen) als äusserst nützlich erweisen.

Um die Vektorgeometrie auch spielerisch kennenzulernen, werden wir sie zum Erzeugen fotorealistischer Bilder verwenden. Dafür werden wir dreidimensionale Szenen mit Hilfe der Programmiersprache *POV-Ray* beschreiben und diese Szenen dann per *ray tracing*, also durch das Zurückverfolgen von Lichtstrahlen, in Bilder umrechnen.

16.1 Grundbegriffe

16.1.1 Koordinatensystem, Punkte

In der Regel verwenden wir ein **rechtsdrehendes** Koordinatensystem; dies bedeutet, dass x-, y- und z-Achse wie **Daumen** (x), **Zeigefinger** (y) und **Mittelfinger** (z) der **rechten Hand** orientiert sind.
In Skizzen wird das Koordinatensystem im **Schrägbild** wie folgt dargestellt: Die x-Achse weist nach unten links, die y-Achse nach rechts und die z-Achse nach oben. Typischerweise ist eine x-Einheit auf dem Papier die Hälfte der negativen Summe einer y- und z-Einheit.



Aufgabe 16.1 Stellen Sie ein 3-dimensionales Koordinatensystem im Schrägbild dar und zeichnen Sie die folgenden Punkte ein:

a) $A = (3, 4, 2)$ b) $B = (2, 5, 3)$ c) $C = (-3, -1, 2)$ d) $D = (-2, 1, -4)$ e) $E = (-3, -3, -2)$

16.1.2 Vektoren

Definition 16.1 Vektor

Ein Vektor wird allgemein als Variable mit einem Pfeil darüber geschrieben. Konkrete Vektoren werden mit **Komponenten** zwischen runden Klammern übereinander geschrieben:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Folgende Vorstellungen helfen, die Natur eines Vektors zu verstehen:

- Eine Parallelverschiebung verschiebt alle Punkte des Raumes in die **gleiche Richtung** um die **gleiche Länge**. Diese Verschiebung kann durch einen Vektor angegeben werden. Umgekehrt entspricht auch jedem Vektor eine Verschiebung.
- Ein Vektor kann als Pfeil dargestellt werden. Dabei spielt es keine Rolle, wo der Anfangspunkt vom Pfeil liegt, nur **Länge und Richtung** sind relevant. Ein Vektor kann also durch unendlich viele parallele und gleich lange Pfeile dargestellt werden.

Schreibt man einen Vektor in Komponenten, geben diese an, um wie viele Einheiten in die Richtung der Koordinatenachsen verschoben wird. Z.B. steht der Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

für die Verschiebung um 2 Einheiten in x-Richtung, -1 Einheit in y-Richtung und 3 Einheiten in z-Richtung.

16.1.3 Spezielle Vektoren

Definition 16.2 Nullvektor

Der **Nullvektor** entspricht der Verschiebung, die nichts verschiebt (auch Identität genannt):

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Länge von $\vec{0}$ ist Null.

Es macht Sinn zu definieren, dass $\vec{0}$ jede mögliche Richtung hat. Er ist also zu jedem anderen Vektor parallel und steht senkrecht zu jedem anderen Vektor.

Definition 16.3 Basisvektoren

Die drei Basisvektoren sind definiert als

$$\vec{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und spannen das Koordinatensystem auf. Manchmal werden diese Vektoren auch als $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ und $\vec{e_3}$ notiert.

Die Länge der Basisvektoren ist jeweils 1 (in Einheiten gemessen).
Jeder Vektor kann als Summe von Vielfachen der Basisvektoren geschrieben werden, z.B.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\vec{e_x} - \vec{e_y} + 3\vec{e_z}$$

oder allgemein:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$$

Aufgabe 16.2 Zeichnen Sie folgende Vektoren als Pfeile (beginnend im Ursprung) im Schrägbild ein:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Merke 16.1 Ortsvektor

«Fixiert» man einen Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ am Nullpunkt $O = (0,0,0)$, zeigt seine Spitze zum Punkt $P = (x,y,z)$ mit den gleichen Koordinaten wie die Komponenten von $\vec{v}$. Man notiert:

$$\vec{v} = \vec{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

$\vec{OP}$ ist der **Ortsvektor** von P.

Ein Punkt ist fixiert im Raum, im Gegensatz zu einem Vektor, der durch einen Pfeil mit beliebiger Lage darstellt werden kann (Richtung und Länge sind aber fix).

16.1.4 Länge eines Vektors

Aufgabe 16.3 Bestimmen Sie die Länge der folgenden Vektoren:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ e) $\vec{e} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Aufgabe 16.4 Finden Sie weitere Vektoren mit ganzzahligen Komponenten und ganzzahliger Länge.

Merke 16.2 Betrag eines Vektors

Der **Betrag** (oder auch die **Länge**) eines Vektors $\vec{v}$ berechnet sich aus den Komponenten v_x, v_y und v_z wie folgt:

$$|\vec{v}| = \left|\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}\right| =$$

16.1.5 Vektor von Start- zu Endpunkt

Aufgabe 16.5 Gegeben sind die Punkte $A = (3, -4, -1)$, $B = (-1, 2, 3)$ und $C = (1, -1, 1)$. Berechnen Sie die Komponenten des Vektors a) $\vec{a} = \vec{AB}$ (d.h. Startpunkt in A, Endpunkt in B). Analog dazu b) $\vec{b} = \vec{AC}$ und c) $\vec{c} = \vec{CB}$.
Was schliessen Sie aus dem Resultat von b) und c)? Machen Sie nötigenfalls eine Skizze der Situation.

Merke 16.3 Vektor zwischen Punkten

Die Komponenten vom Vektor $\vec{AB}$ (vom Punkt A zum B) berechnet man, indem man von den Koordinaten des Endpunktes die Koordinaten des Anfangspunktes subtrahiert. Kurz:

«Endpunkt minus Anfangspunkt.»

16.1.6 Summe zweier Vektoren

Vektoren können addiert werden und man erhält wieder einen Vektor. Genau so wie nacheinander ausgeführte Verschiebungen als eine einzige Verschiebung aufgefasst werden kann.

Merke 16.4 Summe von Vektoren

Die Summe zweier Vektoren $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ erhält man zeichnerisch, indem man den Anfang des Pfeils für $\vec{b}$ an das Ende eines Pfeils für $\vec{a}$ hängt. Die Summe $\vec{c}$ wird dann durch den Pfeil vom Anfang von $\vec{a}$ zum Ende von $\vec{b}$ dargestellt.
Sind die Vektoren mit Komponenten gegeben, wird komponentenweise addiert:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 16.6 Bilden Sie alle möglichen Summen der drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

16.1.7 Skalare Multiplikation

Zahlen (= Skalare) können mit Vektoren multipliziert werden. Dabei ändert sich die Länge des Vektors. Er wird gestreckt (skaliert). Die Richtung bleibt für positive Zahlen erhalten. Für negative Zahlen zeigt das Resultat in die entgegengesetzte Richtung.

Merke 16.5 Skalare Multiplikation = Zahl-Vektor-Multiplikation

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ gilt: $\lambda\vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \end{pmatrix}$ und $|\lambda\vec{v}| = |\lambda| \cdot |\vec{v}|$

Aufgabe 16.7 Beweisen Sie die letzte Gleichung in obiger Merke-Box.

Aufgabe 16.8 Berechnen Sie: a) $3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $-2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $-\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 16.9 Skalieren Sie die Vektoren so, dass sie die gegebene Länge erreichen:
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, Länge 6 b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$, Länge 1 c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, Länge 1.

Definition 16.4 Einheitsvektoren

Ein **Einheitsvektor** $\vec{v}$ hat die Länge 1, d.h. $|\vec{v}| = 1$.

Merke 16.6 Einheitsvektor mit gegebener Richtung

Wird ein von Null verschiedener Vektor durch seine eigene Länge dividiert, entsteht ein **Einheitsvektor** mit gleicher Richtung:

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad \text{hat die Länge 1 und dieselbe Richtung wie } \vec{v}.$$

16.1.8 Aufgaben

Aufgabe 16.10 Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$ durch die Punkte $A = (3, -2, 1)$, $B = (1, 1, 2)$ und $C = (2, 3, -2)$.

a) Berechnen Sie die Vektoren $\vec{c} = \vec{AB}$, $\vec{a} = \vec{BC}$ und $\vec{b} = \vec{CA}$.
b) Berechnen Sie $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ und begründen Sie das Resultat.
c) Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks.
d) Ist das Dreieck rechtwinklig? Überprüfen Sie durch Rechnen.
e) Zeichnen Sie das Dreieck im Schrägbild. Warum ist das Dreieck auf dem Papier nicht rechtwinklig?
f) Bestimmen Sie die Koordinaten vom Punkt D so, dass $ABCD$ ein Rechteck ist.

Aufgabe 16.11 Ein durchschnittlicher Gleitschirm fliegt mit ca. 36 km/h über Grund und einer Gleitzahl von ca. 8 (Kehrwert der Steigung).
Nehmen Sie an, dass ein Gleitschirm bei Windstille genau in x-Richtung fliegt (die z-Achse weist nach oben).
a) Bestimmen Sie die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors in m/s.
b) Es herrscht ein Gegenwind von 18 km/h. Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor über Grund und die effektive Gleitzahl.
c) Gleiche Frage wie b) aber mit Rückenwind von 18 km/h.
d*) Es herrscht Seitenwind (d.h. genau in y-Richtung) von 18 km/h. Um wieviel Grad kommt der Gleitschirm vom Kurs ab?
e*) In welche Richtung (angegeben in Grad) muss der Gleitschirm fliegen, damit er bei 18 km/h Seitenwind effektiv in x-Richtung fliegt? Wie gross ist dann die effektive Gleitzahl? Konstruieren Sie erst, berechnen Sie dann in einem zweiten Schritt.

16.2 Vektorgeometrie in der Ebene

Aufgabe 16.12 Bestimmen Sie zu jedem Vektor alle Vektoren derselben Länge, die senkrecht auf dem betrachteten Vektor stehen.

a) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

Aufgabe 16.13 Von einem gleichseitigen Dreieck in der x/y-Ebene kennt man zwei Punkte A und B. Berechnen Sie die Koordinaten des dritten Punktes C.

a) $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ b) $A = (3, 2)$, $B = (4, 2)$ c) $A = (0, 1)$, $B = (0, 2)$
d) $A = (-1, 0)$ $B = (3, 3)$ e) allgemein.

Aufgabe 16.14 Gegeben sind zwei Kreise k_A und k_B durch ihre Zentren A und B und ihre Radien r_A und r_B. Ziel ist es, die Koordinaten der Schnittpunkte der Kreise zu bestimmen.

a) Was sind die Bedingungen an den Abstand $|\vec{AB}|$ und die Radien, damit es überhaupt Schnittpunkte gibt?
b) Lösen Sie für den Fall $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$, $r_A = 2$ und $r_B = 3$.
c) Lösen Sie für den Fall $A = (0, 0)$, $B = (d, 0)$ mit r_A und r_B allgemein.
d) Verallgemeinern Sie die Lösung von c) auf den gänzlich allgemeinen Fall.

16.3 Repetitionsaufgaben

Aufgabe 16.15 Gegeben sind drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix}$.

a) Zeichnen Sie die drei Vektoren im Schrägbild als Ortsvektoren ein.
b) Bestimmen Sie die Komponenten von $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ und $\vec{e} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}$.
c) Bestimmen Sie die exakten Längen der Vektoren als Wurzelterme.
d) Bestimmen Sie die Komponenten des Vektors $\vec{f}$ mit Länge 4 und gleicher Richtung wie $\vec{a}$.
e) Bestimmen Sie die Komponenten des Vektors $\vec{e}$ nach einer Drehung um $-90°$ um die x-, bzw. y-, bzw. z-Achse.

Aufgabe 16.16 Von einem Würfel $ABCDEFGH$ kennt man den Punkt $A = (-2, 3, -1)$ und die drei Nachbarpunkte $B = (-1, 5, -3)$, $D = (0, 4, 1)$ und $E = (0, 1, -2)$.
Die Punkte $ABCD$ bilden ein Quadrat, die Punkte $EFGH$ ebenfalls, wobei E Nachbar von A, F von B und G von C ist.
Machen Sie eine Skizze der Situation.
Überprüfen Sie, ob die Abstände der Punkte korrekt sind (d.h. ob es sich überhaupt um Eckpunkte eines Würfels handeln kann).
Berechnen Sie anschliessend die Koordinaten der fehlenden Punkte.

Aufgabe 16.17 Gegeben sind die Punkte $A = (-2, 1)$ und $B = (3, -1)$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte C, die mit A, B ein gleichseitiges Dreieck bilden.
b) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte C und D, die mit A, B ein Quadrat bilden.
c) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte C, die mit A, B ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck bilden, wobei AB die Hypotenuse sein soll.

Aufgabe 16.18 Zeichnen Sie die den Punkt $A = (2, 3, 1)$ im Schrägbild ein. Von einem Punkt B weiss man, dass er die x-Koordinate 4 hat und sein Bild im Schrägbild genau auf dem Bild von A liegt. Bestimmen Sie durch Konstruieren und Ablesen seine y- und z-Koordinaten.
Überprüfen Sie Ihre Konstruktion und Abschätzung, indem Sie die zweidimensionalen Komponenten der dreidimensionalen Einheitsvekoren aufschreiben und entsprechend addieren. Z.B. ist $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}-0.5\\-0.5\end{pmatrix}$.
Das Bild von A ist dann $2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

16.4 Lösungen

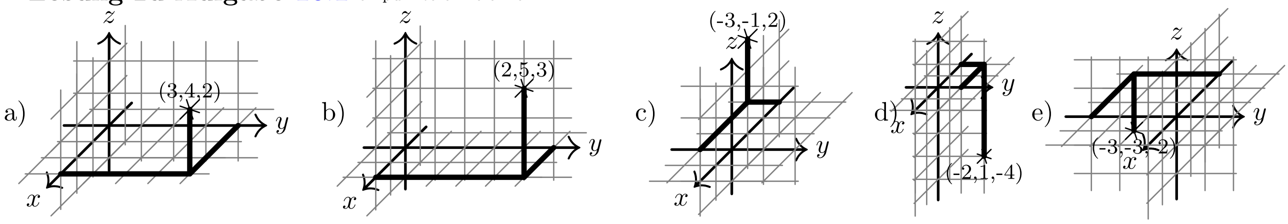
Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

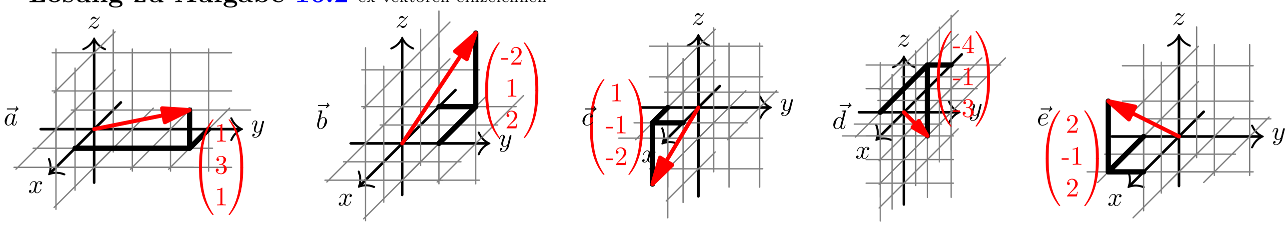
Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 16.1 ex-punkte-einzeichnen



Lösung zu Aufgabe 16.2 ex-vektoren-einzeichnen



Lösung zu Aufgabe 16.3 ex-vektor-laenge

a) $|\vec{a}| = 2$ b) $|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$ c) $|\vec{c}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

d) $|\vec{d}| = \sqrt{(-6)^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{49} = 7$ e) $|\vec{e}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Lösung zu Aufgabe 16.5 ex-vektor-zwischen-Punkten

Man rechnet jeweils die «Endpunkts- minus Anfangspunktskoordinaten», um die Komponenten zu erhalten. Oder formal: $\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1-3 \\ 2-(-4) \\ 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) Die Verschiebung von A nach C ist offenbar die genau gleiche, wie jene von C nach B. C liegt also genau in der Mitte zwischen A und B.

Lösung zu Aufgabe 16.6 ex-vektoraddition

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\vec{b}$		$\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$
$\vec{c}$			$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$

und $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

Lösung zu Aufgabe 16.8 ex-vektoren-skalieren

a) $\begin{pmatrix}-3\\6\\-9\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-6\\0\\2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-3\\2\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

Lösung zu Aufgabe 16.9 ex-vektoren-auf-laenge-skalieren

a) $|\vec{a}| = 3$, also muss mit $\lambda = 2$ multipliziert werden, um die Länge 6 zu erhalten: $2\vec{a} = \begin{pmatrix}-4\\4\\-2\end{pmatrix}$. Es könnte auch mit $\lambda = -2$ multipliziert werden. Allerdings wird dann die Richtung umgekehrt, was in den meisten Fällen unerwünscht ist.

b) $|\vec{b}| = 7$, also muss durch 7 dividiert werden: $\frac{1}{7}\vec{b} = \begin{pmatrix}3/7\\-6/7\\-2/7\end{pmatrix}$.

c) Um die Länge 1 zu erhalten, wird der Vektor durch seine eigene Länge dividiert: $\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

Lösung zu Aufgabe 16.10 ex-figuren-im-raum

a) $\vec{c} = \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\-5\\3\end{pmatrix}$.

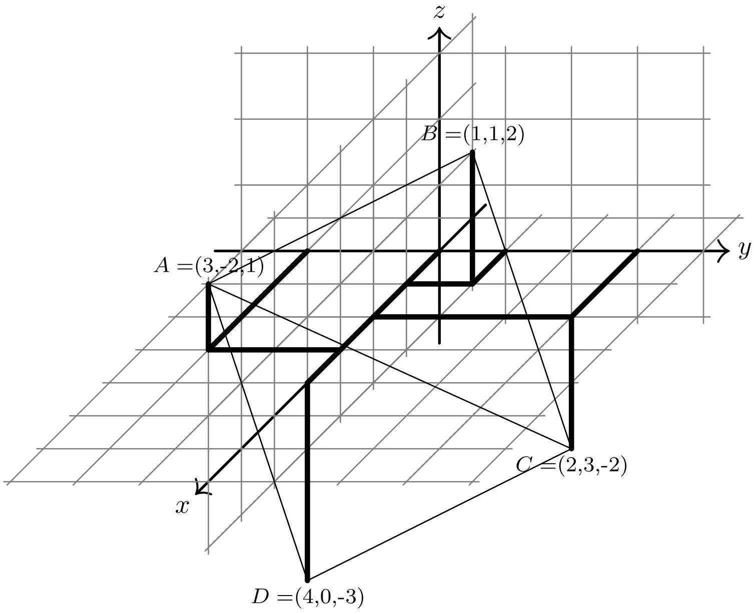
b) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, weil «man nach den drei Verschiebungen wieder am Ausgangspunkt landet.» Oder formal:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{OB} - \vec{OA}) + (\vec{OC} - \vec{OB}) + (\vec{OA} - \vec{OC}) = \vec{0}$$

c) $|\vec{a}| = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$, $|\vec{b}| = \sqrt{1+25+9} = \sqrt{35}$, $|\vec{c}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$.

d) Ja, weil der Satz von Pythagoras gilt (allerdings hier mit Hypotenuse b:

$$35 = |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 = 21 + 14$$



e) Je nach Blickwinkel erscheint das räumliche Dreieck anders «verzogen». Winkel können sowohl zu gross als auch zu klein erscheinen.

f) Es gilt $\vec{CD} = \vec{BA} = -\vec{c}$. Damit ist $\vec{OD} = \vec{OC} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. Die Koordinaten sind also $D = (4, 0, -3)$.

Lösung zu Aufgabe 16.11 ex-gleitschirm-im-wind

a) 36 km/h entspricht genau 10 m/s. Der Geschwindigkeitsvektor ist also $\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ mit Gleitzahl $\frac{10}{-z} = 8$ (sinken bedeutet negative Geschwindigkeit in z-Richtung), also $z = -1.25$ und damit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -1.25 \end{pmatrix}$$

b) 18 km/h Gegenwind enspricht dem Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0, 0 \end{pmatrix}$. Die Summe aus Fluggeschwindigkeit gegenüber der Luft und der Windgeschwindigkeit ergeben die effektive Fluggeschwindigkeit über Grund:

$$\vec{v}_{\text{eff}} = \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1.25 \end{pmatrix}$$

und damit eine Gleitzahl von $5/1.25 = 4$.

c) Gleitzahl $15/1.25 = 12$.

d) Jetzt ist $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und damit $\vec{v}_{\text{eff}} = \vec{v} + \vec{w} \approx \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -1.25 \end{pmatrix}$ Die Geschwindigkeit über Boden ist nun $\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$, d.h. der Tangens vom Winkel ist $\frac{5}{10}$. Der gesuchte Winkel ist also $\arctan(0.5) \approx 26.57°$

e) In der x/y-Ebene zeichnet man einen Kreis k um den Ursprung mit Radius 10. Das sind die Punkte, die bei Windstille nach 1 s erreicht werden. Diesen Kreis verschiebt man um 5 Einheiten in y-Richtung (Wind in 1 s) und erhält alle Punkte k', wo sich der Gleitschirm mit Seitenwind nach 1 s befinden kann. Der Schnitt P von k' mit der x-Achse ergibt den Endpunkt des effektiven Geschwindigkeitsvektors. Davon subtrahiert man den Windvektor um den Geschwindigkeitsvektor des Gleitschirms gegenüber der Luft zu erhalten.
Für die Berechnung sucht man eine x-Koordinate so, dass der Schnittpunkt $P = (x, 0, 0)$ den Abstand 10 vom Punkt $Q = (0, 5, 0)$ hat. Also

$$\begin{aligned} |\vec{PQ}| &= 10 \\ \sqrt{x^2 + 5^2} &= 10 && |(\cdot)^2 \\ x^2 + 25 &= 100 && | : -25 \\ x^2 &= 75 \\ x &= \pm\sqrt{75} \end{aligned}$$

Damit ist $\vec{v}_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} \sqrt{75} \\ 0 \\ -1.25 \end{pmatrix}$ und daraus findet man $\vec{v} = \vec{v}_{\text{eff}} - \vec{w} = \begin{pmatrix} \sqrt{75} \\ -5 \\ -1.25 \end{pmatrix}$.
Alternativ hätte man einen 2-dimenstionalen Vektor mit y-Komponente -5 (Wind kompensieren) und Länge 10 bestimmen können.
Die Gleitzahl ist die Geschwindkeit über Boden dividiert durch die Vertikalgeschwindigkeit, also

$$\frac{\sqrt{75}}{1.25} \approx 6.928$$

Lösung zu Aufgabe 16.12 ex-rechtwinklige-vektoren-in-der-ebene

a) $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$

Lösung zu Aufgabe 16.13 ex-gleichseitiges-dreieck

a) Aus Symmetriegründen ist die x-Koordinate von C $\frac{1}{2}$. Wir suchen also die y-Koordinate so, dass $|\vec{AC}| = |\vec{AB}| = 1$:

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2} &= 1 && |(\cdot)^2\\ \frac{1}{4} + y^2 &= 1 && |-\frac{1}{4}\\ y^2 &= \frac{3}{4}\\ y &= \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Damit sind die Kooridinaten $C = \left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

b) Die Situation ist bis auf eine Verschiebung um $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ die gleiche wie in a). Die Lösung ist also auch veschoben, also $C_1 = \left(\frac{7}{2}, 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ und $C_2 = \left(\frac{7}{2}, 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

c) Die Seitenlänge ist immer noch 1, die Situation ist um 90° gedreht. Damit sind die Lösungen: $C_{1,2} = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

d) $\vec{v} = \vec{AB} = (4,3)$ mit Länge $|\vec{v}| = 5$. Mit Seitenlänge 5 ist die Höhe im gleichseitigen Dreieck $h = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{75}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} = 5\frac{\sqrt{3}}{2}$. Beachten Sie, dass die Höhe im gleichseitigen Dreieck $\frac{\sqrt{3}}{2}$ mal so lang wie die Seite ist.
Vom Punkt A muss also $\frac{5}{2}$ Einheiten in die Richtung von $\vec{v}$ gegangen werden (also $\frac{5}{2}\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$), und dann $5\frac{\sqrt{3}}{2}$ Einheiten rechtwinklig dazu.
Der Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ ist rechwinklig auf $\vec{v}$.
Damit ist $\vec{OC} = \vec{OA} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} \pm \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$
$C_1 = \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} + 2\sqrt{3}\right)$ und $C_2 = \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} - 2\sqrt{3}\right)$

e) Sei $\vec{v} = \vec{AB}$ und $\vec{u}$ ein Vektor rechtwinklig zu $\vec{v}$ mit gleicher Länge. Die Höhe ist $\frac{\sqrt{3}}{2}$ mal so lang wie die Seitenlänge $|\vec{v}|$. Damit gilt:
$\vec{OC} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{v} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}$

Lösung zu Aufgabe 16.14 ex-kreise-schneiden

a) Die Kreise schneiden sich nicht, wenn der Abstand zu gross, oder ein Kreis innerhalb des anderen liegt. Zu gross ist der Abstand wenn $\overline{AB} > r_A + r_B$. k_A liegt innerhalb von k_B wenn $\overline{AB} + r_A < r_B$. Und umgekehrt wenn $\overline{AB} + r_B < r_A$. Ist keine der drei Bedingungen erfüllt, schneiden sich die Kreise.

b) Siehe c). Man erhält $p = \frac{2^2-3^2+4^2}{2\cdot 4} = \frac{11}{8}$ und $h = \sqrt{2^2 - \left(\frac{11}{8}\right)^2} = \frac{3}{8}\sqrt{15}$. Das entspricht direkt den Koordinaten. Und damit ist $C_{1,2} \approx (1.375, \pm 1.452)$.

c) Sei C ein Schnittpunkt. Mit der Höhe $h = h_c$ und dem Höhenfusspunkt H entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke, $\triangle AHC$ und $\triangle CHB$. Seien $p = \overline{AH}$ und $q = \overline{HB}$. Damit ist $p + q = d$, bzw. $q = d - p$. Die Koordinaten von C sind also $C = (p, \pm h)$.
In den rechtwinkligen Dreiecken gilt $r_A^2 = p^2 + h^2$ und $r_B^2 = q^2 + h^2$. Löst man nach h auf und setzt gleich erhält man: $r_A^2 - p^2 = r_B^2 - q^2$. Ersetzt man noch q erhält man:

$$\begin{aligned} r_A^2 - p^2 &= r_B^2 - (d-p)^2 \\ r_A^2 - p^2 &= r_B^2 - d^2 + 2dp - p^2 && \mid +p^2 + d^2 - r_B^2 \\ r_A^2 - r_B^2 + d^2 &= 2dp && \mid : 2d \\ p &= \frac{r_A^2 - r_B^2 + d^2}{2d} \end{aligned}$$

Damit ist die Strecke $\overline{AH}$ bekannt. Die Höhe ergibt sich durch Einsetzen:

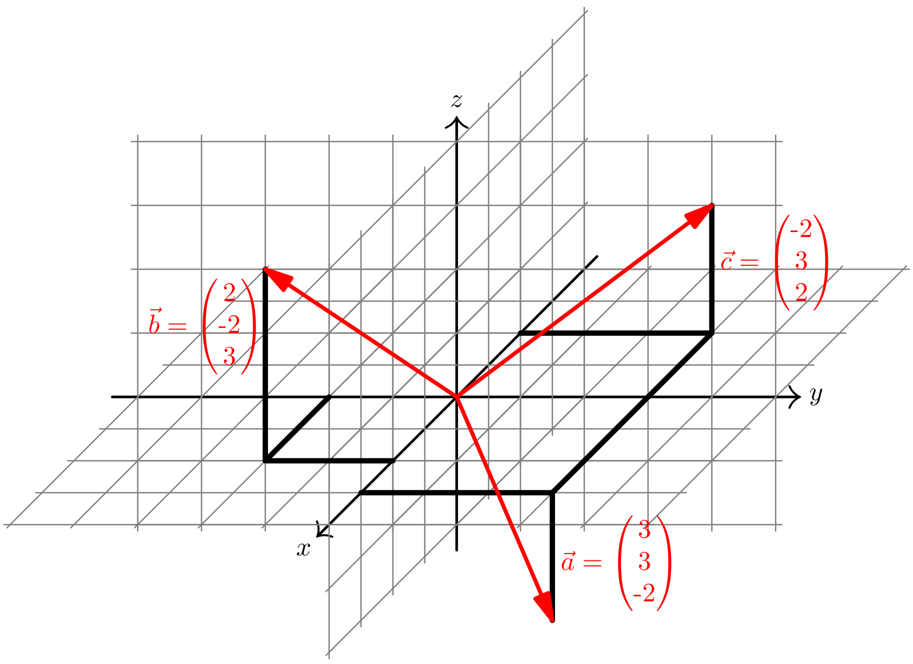
$$h^2 = r_A^2 - p^2 \qquad h = \pm\sqrt{r_A^2 - p^2}$$

d) Man setzt $d = |\vec{AB}|$ und berechnet wieder p und h. Anstatt um p Einheiten in x-Richtung muss p Einheiten in die Richtung von $\vec{AB}$ gegangen werden.
Sei $\vec{v} = \vec{AB}$ und $\vec{u}$ der zu $\vec{v}$ rechtwinklige Vektor mit gleicher Länge. Dann ist

$$\vec{OC} = \vec{OA} + p \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \pm h \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

Lösung zu Aufgabe 16.15 ex-repevektor-lage-summe-laenge

a)



b) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{e} = \begin{pmatrix} 20 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}$.

c) $|\vec{a}| = \sqrt{22}$, $|\vec{b}| = \sqrt{17}$, $|\vec{c}| = \sqrt{17}$.

d) Dividiert man den Vektor durch seine Länge, erhält man einen Vektor der Länge 1 mit gleicher Richtung. Dieser ist noch mit 4 zu multiplizieren:

$$\vec{f} = 4 \cdot \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{22}}\vec{a} = 4 \cdot \frac{\sqrt{22}}{22}\vec{a} = \frac{2}{11}\sqrt{22}\begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{6}{11}\sqrt{22}\\\frac{6}{11}\sqrt{22}\\-\frac{4}{11}\sqrt{22}\end{pmatrix}$$

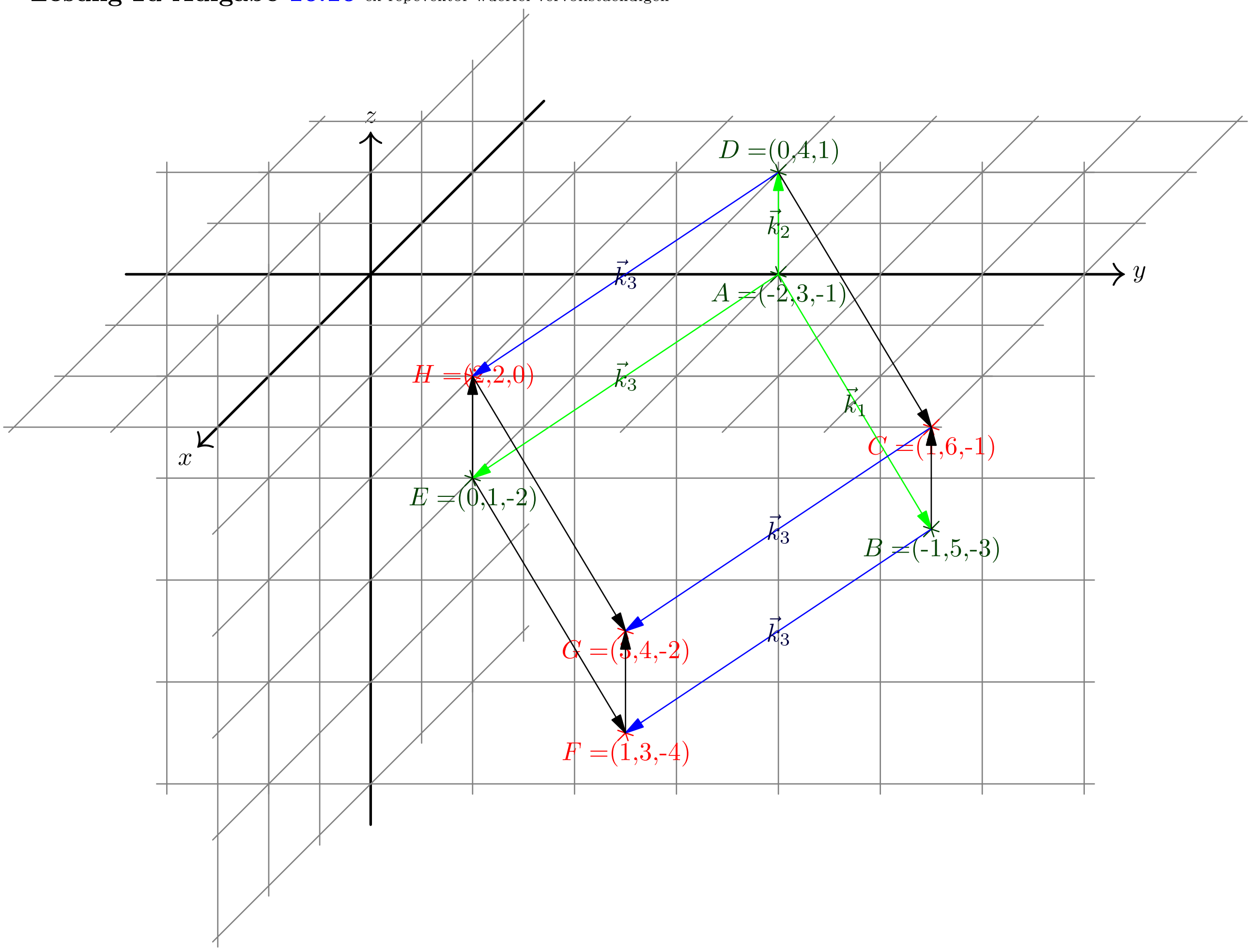
e) $\vec{e} = \begin{pmatrix}20\\-12\\-3\end{pmatrix}$.

Drehung um $-90°$ um die x-Achse: $\begin{pmatrix}20\\-3\\12\end{pmatrix}$. (D.h. z dreht auf y, also nach dem Vertauschen das Vorzeichen der z-Komponente ändern).

Drehung um $-90°$ um die y-Achse: $\begin{pmatrix}3\\-12\\20\end{pmatrix}$. ($x$ dreht auf z).

Drehung um $-90°$ um die z-Achse: $\begin{pmatrix}-12\\-20\\-3\end{pmatrix}$. ($y$ dreht auf x).

Lösung zu Aufgabe 16.16 ex-repevektor-wuerfel-vervollstaendigen



Man berechnet erst die Vektoren der Kanten:

$$\vec{k}_1 = \vec{AB} = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} \qquad \vec{k}_2 = \vec{AD} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \qquad \vec{k}_3 = \vec{AE} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

Daraus ist sofort ersichtlich, dass die Kanten alle die gleiche Länge haben. Es müsste noch überprüft werden, ob die Kanten auch rechtwinklig aufeinander stehen. Dazu fehlt uns z.Z. aber noch ein Hilfsmittel.
Es gilt nun z.B. $\vec{BC} = \vec{k}_2$ oder $\vec{DC} = \vec{k}_1$. Und damit z.B.
$\vec{OC} = \vec{OD} + \vec{DC} = \begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\6\\-1\end{pmatrix}$. Also $C = (1, 6, -1)$.
Die Punkte F, G und H erhält man, indem man die Punkte B, C und D um $\vec{k}_3$ verschiebt:
$F = (1, 3, -4)$, $G = (3, 4, -2)$ und $H = (2, 2, 0)$.

Lösung zu Aufgabe 16.17 ex-repevektor-ebene-figuren

a) Die Höhe im gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge s ist $\frac{\sqrt{3}}{2}s$ (Pythagoras). Sei $\vec{v} = \vec{AB} = \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ ein dazu rechtwinkliger Vektor mit gleicher Länge $s = |\vec{v}| = |\vec{u}|$.
Damit ist $\vec{OC} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{v} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}$. Eingesetzt:

$$\vec{OC} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\-1\end{pmatrix} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}\\ \pm\frac{5\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}.$$

b) Sei $\vec{u}$ wie oben. Also sind $\vec{OC} = \vec{OB} \pm \vec{u}$ und $\vec{OD} = \vec{OA} \pm \vec{u}$. In Zahlen:

$$\vec{OC} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{OD} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

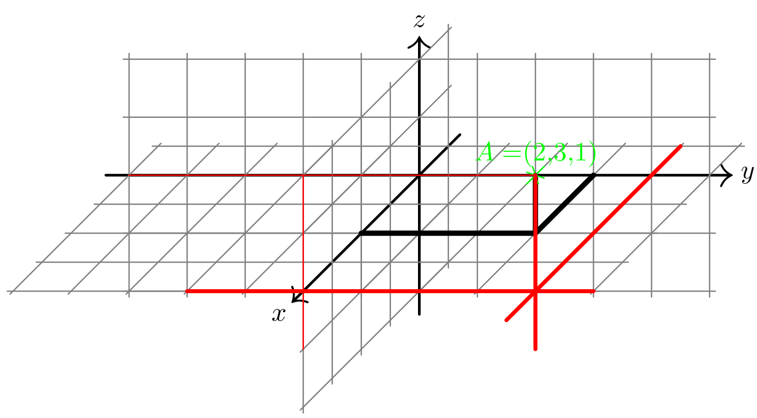
Also $C_1 = (5, 4)$, $D_1 = (0, 6)$ oder $C_2 = (1, -6)$, $D_2 = (-4, -4)$.

c) Die Höhe im rechtwinklig gleichschenkligen Dreieck mit Hypotenuse c ist $h = \frac{1}{2}c$. Damit ist $\vec{OC} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{v} \pm \frac{1}{2}\vec{u}$. Eingesetzt:

$$\vec{OC} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\-1\end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix}1\\\frac{5}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} \pm 1\\ \pm\frac{5}{2}\end{pmatrix}.$$

Lösung zu Aufgabe 16.18 ex-repevektor-koordinaten-einzeichen-ablesen

Auf der xy-Ebene (bzw. auf der xz-Ebene) zeichnet man die Gerade $x = 6$ (d.h. alle Punkte mit x-Koordinate 4). Diese Gerade schneidet man mit einer Parallelen zu z-Achse (bzw. y-Achse), um so die Stützlinien zu konstruieren.
Damit liest man ab: $B = (4, 4, 2)$



Die Einheitsvektoren im Schrägbild sind:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}-0.5\\-0.5\end{pmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

und damit hat das Bild von A den Ortsvektor $2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 = 2\begin{pmatrix}0.5\\0.5\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$
Das Bild von B hat den Ortsvektor $4\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = 4\begin{pmatrix}0.5\\0.5\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

Damit hat man also exakt abgelesen.