



19 Exponentialfunktionen und Logarithmen

Viele natürliche Prozesse können durch Exponentialfunktionen modelliert werden, wie z.B. der *radioaktive Zerfall* oder der *Ausbruch von Epidemien*.

Der Logarithmus ist die Umkehrung einer Exponentialfunktion und findet Anwendungen z.B. in der Chemie mit der Angabe des *pH-Werts* oder bei Massangaben von z.B. *Schallstärke* oder *Erdbebenintensität*.

19.1 Exponentialfunktionen

Definition 47 Exponentialfunktion

Für eine **Basis** $a \in \mathbb{R}^+$ ist die zugehörige **Exponentialfunktion** gegeben durch

$$f(x) = a^x$$

Beachten Sie dass das Argument x im Exponenten steht (im Gegensatz zu Potenzfunktionen, wo das Argument potenziert wird).

Man kann Exponentialfunktionen als Verallgemeinerung von geometrischen Folgen mit $g_1 = q = a$ auf die reellen Zahlen betrachten. Es gilt dann:

$$g_n = g_1 \cdot q^{n-1} = a \cdot a^{n-1} = a^n = f(n)$$

✂ **Aufgabe 363** Warum sind Exponentialfunktionen nur für positive Basen definiert?

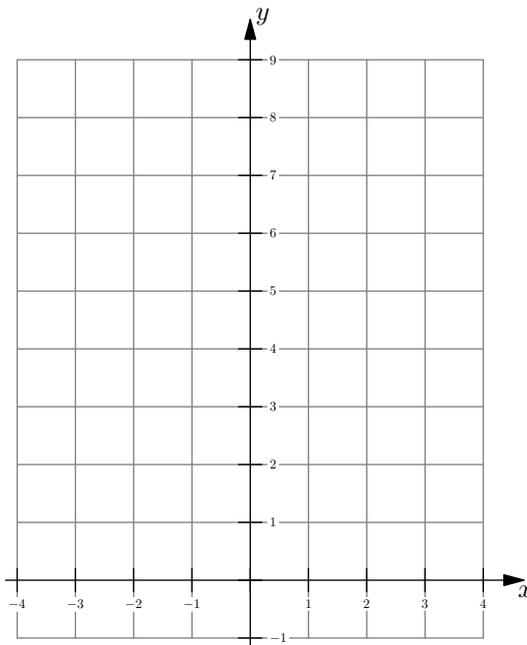


✂ **Aufgabe 364**

Zeichnen Sie die Graphen für die Exponentialfunktionen mit Basis a mit $a \in \{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3 \}$ in das nebenstehende Koordinatensystem.

Vervollständigen Sie unter Beachtung der Graphen die folgenden Sätze:

- Alle Exponentialfunktionen gehen durch den Punkt _____.
- Der Graph der Exponentialfunktion $y = a^x$ ist monoton steigend für _____.
- Der Graph der Exponentialfunktion $y = a^x$ ist monoton fallend für _____.
- Der Wertebereich aller Exponentialfunktionen ist _____.
- Exponentialfunktionen haben _____ Nullstellen.
- Man erhält den Graphen der Funktion $y = (\frac{1}{a})^x$, indem man den Graphen von $y = a^x$ _____.



✂ **Aufgabe 365** Welches Potenzgesetz steht hinter dem letzten Satz der letzten Aufgabe?





Merke Manipulation von Funktionsgraphen

Ersetzung	Effekt	Beispiel mit $f(x) = 2^x$
$g(x) = f(x) + a$	Verschiebung um a in y -Richtung.	$g(x) = 2^x - 2$
$g(x) = a \cdot f(x)$	Streckung mit Faktor a in y -Richtung (d.h. auch Spiegelung an x wenn $a < 0$).	$g(x) = -\frac{1}{3}2^x$
$g(x) = f(x + a)$	\triangleleft Verschiebung um $-a$ in x -Richtung. \triangleleft	$g(x) = f(x - 2) = 2^{x-2}$
$g(x) = f(a \cdot x)$	\triangleleft Streckung mit Faktor $\frac{1}{a}$ in x -Richtung \triangleleft (d.h. auch Spiegelung an y wenn $a < 0$).	$g(x) = f(-2 \cdot x) = 2^{-2x}$

✂ **Aufgabe 366** Ausgehend vom Graphen der Funktion $f(x) = 2^x$, skizzieren Sie die Graphen von $a(x) = -\frac{1}{2}f(x)$, $b(x) = f(-\frac{1}{2}x)$, $c(x) = f(x) - 4$, $d(x) = f(x - 1)$, $e(x) = 1 - f(x - 1)$.

✂ **Aufgabe 367** Sie legen heute auf der Bank 1 Rp. zu einem Zins von 3% an und lassen sich anschliessend einfrieren, um in 2000 Jahren wiederbelebt zu werden. Wie gross ist Ihr Kapital dann, wenn der Zinssatz gleich geblieben ist?

Vergleichen Sie den Betrag mit dem Schweizer Bruttoinlandsprodukt. Was sagt das über die Nachhaltigkeit von einem Zinssatz von 3% aus? Bzw. wie gross müsste die Inflation sein?

Bestimmen Sie die Exponentialfunktion $k(n)$, die das Kapital nach n Jahren beschreibt.

✂ **Aufgabe 368** Bestimmen Sie jeweils eine geeignet multiplizierte Exponentialfunktion, die die Situation beschreibt und beantworten Sie damit die Frage.

- a) Hochgiftiges Plutonium 239 zerfällt radioaktiv. Nach 2410 Jahren (Halbwertszeit) nimmt seine Masse um die Hälfte ab. Wie gross ist der Massenverlust pro Jahr?
- b) Die Anzahl Bakterien in einer Nährlösung verdoppelt sich alle drei Stunden. Zu Beginn befinden sich 10'000 Bakterien in der Nährlösung. Wie viele Bakterien sind nach 1, 2, 5 und 24 Stunden in der Nährlösung?
- c) Lässt man eine 90° C heisse Tasse Tee bei 0° C Lufttemperatur stehen, kühlt sich die Tasse pro 25 min um die Hälfte ab. Wie warm ist die Tasse nach 10 min? Wie warm ist die Tasse nach 2 h? Bestimmen Sie mit dem TR, wie lange es geht, bis der Tee 50° C warm ist.

Die Zahlen sind erfunden, die Tasse ist wohl eher gut isoliert.

Definition 48 Exponentielles Wachstum und Zerfall

Es sei $B(t)$ eine Funktion, die den Bestand einer Substanz oder einer Tierart oder eines Geldbetrags usw. zum Zeitpunkt t angibt. t ist in einem beliebigen Zeitmass (Stunden, Sekunden, Jahre...) gemessen.

Falls sich der Bestand $B(t)$ pro Zeitintervall um den Faktor q vermehrt bzw. verringert, so spricht man von **exponentiellem Wachstum** (für $q > 1$) bzw. **exponentiellem Zerfall** (für $0 < q < 1$).

Für den Bestand $B(t)$ zur Zeit t gilt dann die Gleichung:

$$B(t) = B_0 \cdot q^t,$$

wobei B_0 der Anfangsbestand zur Zeit 0 ist.

Hat man eine Zunahme (bzw. Abnahme) um den Faktor q während eines Zeitintervalls Δt , dann gilt die Gleichung:

$$B(t) = B_0 \cdot q^{\frac{t}{\Delta t}}.$$



Definition 49 Wachstumsfaktor

Für eine Wachstumsfunktion $B(t) = B_0 \cdot q^t$ und eine Zeitspanne Δt heisst

$$r = \frac{B(t + \Delta t)}{B(t)} = \text{✎}$$

der zur Zeitspanne Δt gehörende **Wachstumsfaktor**.

✎ **Aufgabe 369** Zeigen Sie, dass der Wachstumsfaktor nur von Δt , nicht aber von t abhängt.



Merke Halbwertszeit und Verdoppelungszeit

Bei einem Zerfallsprozess ist die **Halbwertszeit** die zum Wachstumsfaktor $\frac{1}{2}$ gehörende Zeitspanne.
Beim Wachstumsprozess ist die **Verdoppelungszeit** die zum Wachstumsfaktor 2 gehörende Zeitspanne.

✎ **Aufgabe 370** Nach 10 Tagen ist von einem radioaktiven Stoff noch 10% übrig. Wie gross ist die Halbwertszeit von diesem Stoff?

Sei $m(t)$ der Anteil (in $[0, 1]$) nach der Zeit t in Tagen.

$m(t) = \text{✎}$

Für die Halbwertszeit x gilt:



Der TR liefert ✎

In der obigen Gleichung suchen wir einen Exponenten. Bis jetzt haben wir nur Gleichungen gelöst, wo die Unbekannte in der Basis ist. Um solche Gleichungen zu lösen haben wir Wurzeln, bzw. gebrochene Exponenten verwendet.

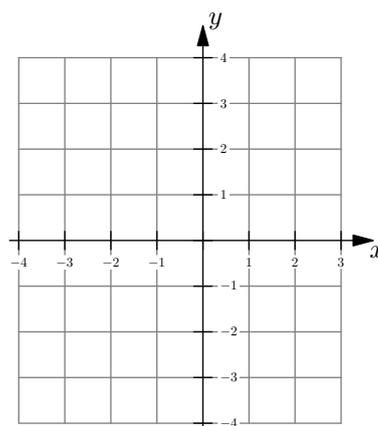
✎ **Aufgabe 371**

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = 2^x$ in folgendes Koordinatensystem ein. Zeichnen Sie dann den Graphen der Umkehrfunktion $g(x) = f^{-1}(x)$. Die Umkehrfunktion $g(x_g)$ beantwortet folgende Frage: «Für welchen x -Wert x_f ist $f(x_f) = x_g$?»

Es gilt somit $g(f(x)) = x$. D.h. g macht f wieder rückgängig.

Hinweis: Die Notation f^{-1} hat nichts mit Potenzieren oder dem Kehrwert zu tun und ist nur eine Notation, um die Umkehrfunktion zu schreiben. Diese rührt daher, dass $h(x) = f(g(x))$ als $h = f \circ g$ geschrieben werden kann, was ein bisschen wie eine Multiplikation aussieht. Die Multiplikation mit einer Zahl a kann mit der Multiplikation mit a^{-1} rückgängig gemacht werden.

In seltenen Fällen trifft man die Notation «arg f » an, d.h. die Umkehrfunktion liefert zum Wert $f(x)$ das Argument x .



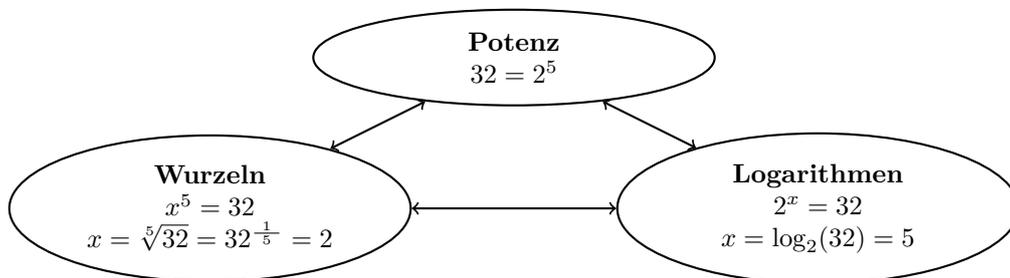
Merke Graph der Umkehrfunktion

Den Graphen einer Umkehrfunktion f^{-1} erhält man, indem man den Graphen der Ausgangsfunktion f an der 45° Achsen-Winkelhalbierenden spiegelt.



19.2 Logarithmen

Logarithmusfunktionen sind die Umkehrfunktionen von Exponentialfunktionen, so wie Wurzelfunktionen die Umkehrfunktionen von Potenzfunktionen sind. Nicht zu verwechseln mit einem *Algorithmus*, was eine Lösungs- oder Handlungsvorschrift ist, die z.B. mit einem Computerprogramm umgesetzt werden kann.



- Die Wurzel beantwortet die Frage nach der Basis bei einer Potenzgleichung.
- Der Logarithmus beantwortet die Frage nach dem Exponenten bei einer Exponentialgleichung.

Daraus ergibt sich folgende Definition:

Definition 50 Logarithmus

Für $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $c \in \mathbb{R}^+$ definiert man

$$a = \log_b(c) \iff b^a = c$$

Ausgesprochen als «*a* ist der **Logarithmus zur Basis b von c ». b ist die **Logarithmusbasis** und c ist das **Argument**.**

Merke

Der Logarithmus **liefert den Exponenten**, mit dem die Basis potenziert werden muss, um das Argument (das was im Logarithmus steht) zu erhalten.

Für $c < 0$ ist $\log_b(c)$ nicht definiert, weil Exponentialfunktionen nur positive Werte liefern.

Es gilt $\log_b(1) = 0$, weil $b^0 = 1$.

19.2.1 Spezielle Logarithmusbasen

Basis	Name	Schreibweise
10	Zehnerlogarithmus (dekadischer Logarithmus)	$\lg(c) := \log_{10}(c)$
2	Zweierlogarithmus (binärer Logarithmus)	$\text{lb}(c) := \log_2(c)$
$e \approx 2.7182818$	Natürlicher Logarithmus	$\ln(c) := \log_e(c)$

✂ **Aufgabe 372** Berechnen Sie

- | | | | |
|----------------------|-----------------------|-------------------|------------------------|
| a) $\lg(10'000)$ | b) $\lg(0.1)$ | c) $\lg(10^{23})$ | d) $\lg(0.0001)$ |
| e) $\text{lb}(1024)$ | f) $\text{lb}(0.125)$ | g) $\ln(1)$ | h) $\ln(e^{\sqrt{2}})$ |

✂ **Aufgabe 373** Lösen Sie nach x auf (Resultat als Logarithmus). Schätzen Sie für a) bis c) das Ergebnis von Hand ab, und überprüfen Sie mit dem TR.

- | | | |
|---------------|--------------|-------------------------|
| a) $8^x = 16$ | b) $2^x = 7$ | c) $10^x = \frac{1}{2}$ |
| d) $a^x = 7$ | e) $2^x = b$ | f) $z^x = y$ |



✂ **Aufgabe 374** Beweisen Sie mit der Definition des Logarithmus, dass $\log_b(b^x) = x$ und $b^{\log_b(x)} = x$.



✂ **Aufgabe 375** Berechnen Sie von Hand mit der Idee $\log_b(b^a) = a$.

- | | | |
|-----------------|--|-----------------------|
| a) $\log_2(32)$ | b) $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$ | c) $\log_5(\sqrt{5})$ |
| d) $\log_9(27)$ | e) $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\right)$ | f) $\log_7(1)$ |

✂ **Aufgabe 376** Berechnen Sie von Hand mit der Idee $b^{\log_b(c)} = c$.

- | | | |
|--------------------|---------------------------|-----------------------|
| a) $3^{\log_3(7)}$ | b) $9^{\log_3(\sqrt{5})}$ | c) $2^{-\log_8(125)}$ |
|--------------------|---------------------------|-----------------------|

✂ **Aufgabe 377** Zeichnen Sie die Graphen folgender Funktionen.

- | | | | |
|-----------------------|--------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| a) $a(x) = \log_2(x)$ | b) $b(x) = \log_{10}(x)$ | c) $c(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$ | d) $d(x) = \log_{\frac{1}{10}}(x)$ |
|-----------------------|--------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|

19.3 Logarithmusgesetze

✂ **Aufgabe 378** Richtig oder falsch? Finden Sie Gegenbeispiele oder gute Argumente für die Richtigkeit:

- a) $\log_b(x + y) = \log_b(x) + \log_b(y)$
- b) $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) \cdot \log_b(y)$
- c) $\log_b(x - y) = \log_b(x) - \log_b(y)$
- d) $\log_b(\sqrt{x}) = \sqrt{\log_b(x)}$
- e) $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$
- f) $\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\log_b(x)}$
- g) $\log_b(x^y) = (\log_b(x))^y$
- h) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$
- i) $\log_{\frac{1}{b}}(x) = -\log_b(x)$
- j) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(y)}$

✂ **Aufgabe 379** Beweisen Sie, dass $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$ (für $b, x, y \in \mathbb{R}^+, b \neq 1$).

Vorgehen: Schreiben Sie x und y als Potenz von b und setzen Sie ein:



✂ **Aufgabe 380** Beweisen Sie, dass $\log_b(x^y) = y \cdot \log_b(x)$ (für $b, x \in \mathbb{R}^+, b \neq 1, y \in \mathbb{R}$).

Vorgehen: Schreiben Sie x als Potenz von b und setzen Sie ein:





✂ **Aufgabe 381** Zeigen Sie mit den beiden vorherigen Gesetzen, dass auch Folgendes gilt:

a) $\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_b(x)$ b) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$



✂ **Aufgabe 382** Beweisen Sie den **Basiswechsel** für Logarithmen: $\log_b(x) = \frac{\log_c(x)}{\log_c(b)}$.

Vorgehen: Schreiben Sie x als Potenz von b und berechnen Sie $\log_c(x)$. Lösen Sie dann nach $\log_b(x)$ auf.



Der Basiswechsel wird angewandt, um Logarithmen zu beliebigen Basen numerisch auszurechnen. Es stellt sich heraus, dass der natürliche Logarithmus zur Basis $e \approx 2.7182818$ am einfachsten zu berechnen ist. Daher werden alle Logarithmen von Computern wie folgt berechnet:

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$$

Merke Logarithmusgesetze

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y) \qquad \log_b(x^y) = y \cdot \log_b(x)$$

Daraus folgt

$$\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_b(x) \qquad \log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y) \qquad \log_b(x) = \frac{\log_c(x)}{\log_c(b)}$$

Vor der Ära der Taschenrechner waren Rechenschieber weit verbreitet. Die Grundform sind zwei **logarithmische Skalen**, d.h. die Zahl x hat den Abstand proportional zu $\log(x)$ von der Zahl 1 (was als Nullpunkt der logarithmischen Skala aufgefasst werden kann). Damit kann nun multipliziert werden, indem mit zwei gleichen Skalen die Abstände addiert werden:

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$$

Bei «modernen» Rechenschiebern sind zusätzlich noch viele weitere Skalen vorhanden, die viele weitere Berechnungen erlauben, wie z.B. Quadrieren oder trigonometrische Funktionen.

✂ **Aufgabe 383** Rechenschieber: Wer hat's erfunden?

✂ **Aufgabe 384** Was ist der Zusammenhang zwischen $\log_x(y)$ und $\log_y(x)$?

Hinweis: Zwei mögliche Ansätze: Basiswechsel oder Definition des Logarithmus und Gleichung umformen.

✂ **Aufgabe 385** Zerlegen Sie:

a) $\log\left(\frac{ab}{a+b}\right)$

b) $\log\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{x^2-y^2}\right)$

c) $\log_a\left(\frac{a \cdot b^c}{\sqrt[3]{a}}\right)$

d) $\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \dots + \ln\left(\frac{999}{1000}\right)$

✂ **Aufgabe 386** Fassen Sie als einen einzigen Logarithmus zusammen.

a) $\log(b) - \log(c + d)$

b) $2 \log(x) + 3 \log(y) - 5 \log(z)$

c) $\frac{1}{3}(\log(b) + 2 \log(c)) - \frac{1}{2}(5 \log(d) + \log(f))$

d) $\ln(a + b) + 1$



19.4 Repetitionsaufgaben

$$\text{Geometrische Reihe: } s_n = \sum_{i=1}^n g_i = g_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \qquad \text{Kreis: } U = 2\pi r \quad A = \pi r^2$$

✂ **Aufgabe 387** Eine Spirale wird wie folgt gezeichnet: Beim Punkt $Z_1 = (0, 0)$ wird mit dem Zirkel eingestochen und ein Viertelkreis mit Radius $r_1 = 1$ eingezeichnet, vom Punkt $(1, 0)$ zum Punkt $(0, 1)$.

Nach jedem Schritt wird der Radius um 25% erhöht und das Zentrum so verschoben, dass die Kreislinie im Gegenuhrzeigersinn sauber anschliesst. So ist z.B. im zweiten Schritt der Radius $r_2 = 1.25$ und das Zentrum $Z_2 = (0, -0.25)$ (damit der Kreisbogen beim Punkt $(0, 1)$ beginnt).

- Zeichnen Sie die ersten vier Kreisbogen mit Einheit 4 Häuschen.
- Berechnen Sie die Gesamtlänge der Spirale nach 5 Umdrehungen (d.h. nach 20 Viertelkreisen).
- * Berechnen Sie die x-Koordinate vom Zentrum des 20. Viertelkreises.

✂ Aufgabe 388

- Für gewisse bildgebende Verfahren in der Medizin wird dem Patienten ein radioaktives Kontrastmittel verabreicht. Ein gängiges Isotop ist Fluor 18, das eine Halbwertszeit von knapp zwei Stunden hat. Die Vorbereitung des Isotops als Arznei dauert rund 50 Minuten. Wie viel von der ursprünglichen Masse des Fluor 18 ist nach der Vorbereitung noch vorhanden?
- Beim Beginn einer Epidemie kann die Anzahl Erkrankter mit einer Exponentialfunktion beschrieben werden. Vorgestern wurden 23 Erkrankte gezählt, heute 42.
 - Prognostizieren Sie damit die Anzahl Erkrankter in 2 Tagen und in einer Woche.
 - Berechnen Sie die Verdoppelungszeit. Lösen Sie die Gleichung von Hand und geben Sie ein exaktes Resultat nur mit natürlichen Zahlen und Logarithmen von natürlichen Zahlen an.

✂ **Aufgabe 389** Zeichnen Sie die Graphen folgender Funktionen in ein Koordinatensystem pro Teilaufgabe. Beschreiben Sie jeweils auch, wie der Graph von $f(x)$ zu transformieren ist, um den die Graphen der anderen Funktionen zu erhalten.

- $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{x-2}$, $h(x) = \log_2(x)$
- $f(x) = 3^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $h(x) = -3^x + 2$

✂ Aufgabe 390

- Beweisen Sie, dass $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$ (für $b, x, y \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 1$). Vorgehen: Schreiben Sie x und y als Potenz von b und setzen Sie ein.
- Mit Basiswechsel und weiteren Logarithmusgesetzen zeigen Sie, dass $\log_{\frac{1}{b}}(x) = -\log_b(x)$.
- Mit Basiswechsel und weiteren Logarithmusgesetzen zeigen Sie, dass $\log_{b^2}(x) = \frac{1}{2} \log_b(x)$.
- * Sei g_n eine geometrische Reihe mit $q > 0$ und $g_1 > 0$. Zeigen Sie, dass $a_n = \log_2(g_n)$ eine arithmetische Reihe ist und bestimmen Sie die zugehörige Differenz d .

✂ **Aufgabe 391** Berechnen Sie von Hand:

- | | | |
|--------------------------------------|----------------------|--|
| a) $\log_7\left(\frac{1}{49}\right)$ | b) $\log_{16}(8)$ | c) $\log_{27}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right)$ |
| d) $5^{\log_5(10)}$ | e) $125^{\log_5(4)}$ | f) $5^{\log_{125}(8)}$ |



19.5 Bedeutung vom Logarithmus im Alltag

Logarithmusfunktionen kommen im Alltag in verschiedensten Bereichen vor, meist aber versteckt. Im Folgenden werden die mathematischen Zusammenhänge und einige Anwendungen aufgezeigt.

19.5.1 Webersches Gesetz

1834 bemerkte der Physiologe Ernst Heinrich Weber, dass ein Sinnesorgan ab einem bestimmten Intensitätsbetrag eine Veränderung registriert (differentielle Wahrnehmbarkeitsschwelle; englisch: just noticeable difference = gerade noch wahrnehmbarer Unterschied), die als Unterschied ΔR zum vorangehenden Reiz R in einem bestimmten, gleich bleibenden Verhältnis k zu diesem steht:

$$k = \frac{\Delta R}{R}$$

Beispiele:

- beim Tastsinn beträgt der erforderliche relative Unterschied $\frac{\Delta R}{R}$ nach Webers Versuchen etwa 3 Prozent des Hautdruckes,
- beim Helligkeitssehen etwa 1 bis 2 Prozent der Lichtstärke.
- beim Geschmack muss die Konzentration um 10 bis 20 Prozent steigen, um als stärker empfunden zu werden.
- ein relativer Gewichtsunterschied von ungefähr 2% eines in der ruhenden Hand gehaltenen Gegenstands wird erkannt. So nimmt man die Gewichtszunahme eines Gegenstands von zunächst 50 g (Gramm) erst wahr, wenn das Gewicht um 1 g auf 51 g angewachsen ist. Entsprechend muss 5000 g Gewicht um 100 g anwachsen, um schwerer zu wirken.

Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Weber-Fechner-Gesetz>, abgerufen am 23. Januar 2018

19.5.2 Lichtintensität

LEDs können sehr schnell ein- und ausgeschaltet werden. Im folgenden Experiment wird eine LED pro Sekunde 1000 mal ein- und ausgeschaltet. Die Zeit, während der die LED pro Zyklus eingeschaltet ist, kann variiert werden und zwar linear in $2^{16} = 65536$ Stufen. Man spricht vom «duty cycle» (Tastgrad), der meist in % angegeben wird.

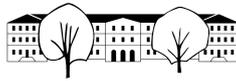
- An einem Drehrad kann der duty cycle proportional zum Winkel eingestellt werden. Was stellen Sie fest? Erklärung?
- Die LED wechselt alle 0.5 s den Duty cycle. Wie gross muss der Unterschied der beiden duty cycles sein, damit der Unterschied wahrnehmbar ist?
- Zwei LEDs werden auf unterschiedliche duty cycles d_1 und d_2 gestellt. Regeln Sie die dritte LED so, dass die Helligkeit der dritten LED genau dazwischen liegt. Wie gross müsste der duty cycle nach dem Weberschen Gesetz sein (also Formel aus d_1 und d_2)?



Wird die Leistung (Energie pro Zeit) mehrmals mit der gleichen Zahl multipliziert (prozentualer Anstieg), nehmen wir das als gleichmässigen (additiven) Anstieg der Helligkeit wahr. Aus der Multiplikation der Leistung wird eine Addition in der Wahrnehmung.

Was wir wahrnehmen, ist also nicht direkt die abgestrahlte Leistung, sondern der Logarithmus davon. Was ist der Logarithmus vom geometrischen Mittel?

$$\log(\sqrt{ab}) =$$



19.5.3 Erdbebenintensität

Zur Messung der Intensität von Erdbeben wird jeweils eine «Magnituden-Skala» verwendet. Dabei gibt es verschiedenste Mess- und Berechnungsmethoden und daraus gebräuchliche Skalen, die aber je nach Stärke des Bebens ungeeignet sind. Im jeweils brauchbaren Bereich liefern diese Methode aber vergleichbare Werte. Es wird jeweils versucht, die freigesetzte Energie zu bestimmen.

Die Richterskala liefert nur für Beben mit Magnitude unter 6.5 brauchbare Werte. In der Presse wird aber trotzdem oft von der «nach oben offenen Richterskala gesprochen», auch wenn andere Skalen zum Einsatz kamen.

Im Folgenden sprechen wir nur noch von «Magnitude», ohne die genaue Messmethode und Skala zu nennen.

Für zwei Erdbeben mit Magnituden M_1 und M_2 und den entsprechenden freigesetzten Energien E_1 und E_2 gilt folgender Zusammenhang:

$$\frac{E_2}{E_1} = 10^{-\frac{3}{2}(M_2 - M_1)}.$$

Der Zusammenhang zwischen Magnitude M und Energie E in Joule ist

$$E = 10^{-\frac{3}{2}M + 4.8}.$$

✂ **Aufgabe 392** Wie viel mal mehr Energie wird freigesetzt, wenn die Magnitude um 1 steigt? Welcher Magnitude entspricht die Explosion der Hiroshima-Bombe, die ca. $5.25 \cdot 10^{13}$ Joule freigesetzt hat?



✂ **Aufgabe 393** Am 3. März 2017 gab es mit Magnitude 4.6 das stärkste Beben in der Schweiz (Epizentrum Urnerboden) seit mehr als 10 Jahren (Quelle: schweizerischer Erdbebendienst). Das Beben, das 1906 San Francisco zerstörte, hatte eine Magnitude von ca. 7.8.

Wie viel mal mehr Energie wurde beim Beben in San Francisco freigesetzt? 

Fazit

Die Magnituden-Skala ist ebenfalls eine logarithmische Skala. Konkret ist die Magnitude eine lineare Funktion eines Logarithmus der freigesetzten Energie.

✂ **Aufgabe 394** Wie wird aus der Energie E die Magnitude M berechnet? 



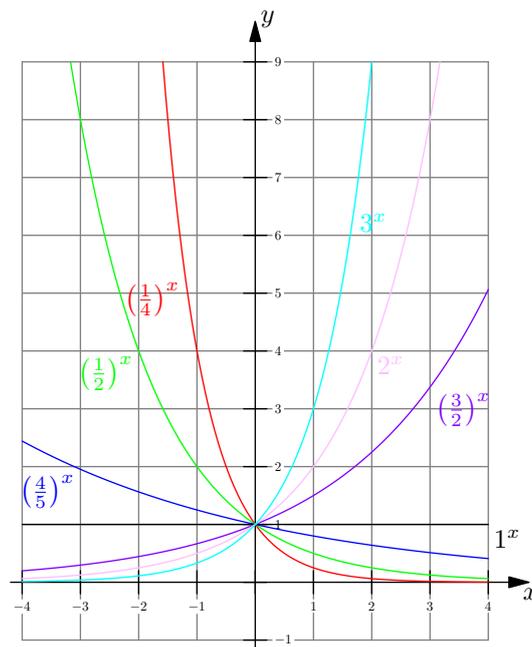
19.6 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

- ✂ Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".
- ✳ Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**
- ✂ Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

✂ Lösung zu Aufgabe 364 ex-graphen-expfunkt

- Alle Exponentialfunktionen gehen durch den Punkt $(0, 1)$.
- Der Graph der Exponentialfunktion $y = a^x$ ist monoton steigend für $a > 1$.
- Der Graph der Exponentialfunktion $y = a^x$ ist monoton fallend für $a < 1$.
- Der Wertebereich aller Exponentialfunktionen ist $R^+ =]0, \infty]$.
- Exponentialfunktionen haben **keine** Nullstellen.
- Man erhält den Graphen der Funktion $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, indem man den Graphen von $y = a^x$ **an y spiegelt**.



✂ Lösung zu Aufgabe 366 ex-graphen-manipulieren

$a(x)$: Streckung in y -Richtung mit Faktor $-\frac{1}{2}$, d.h. Stauchung und Spiegelung.

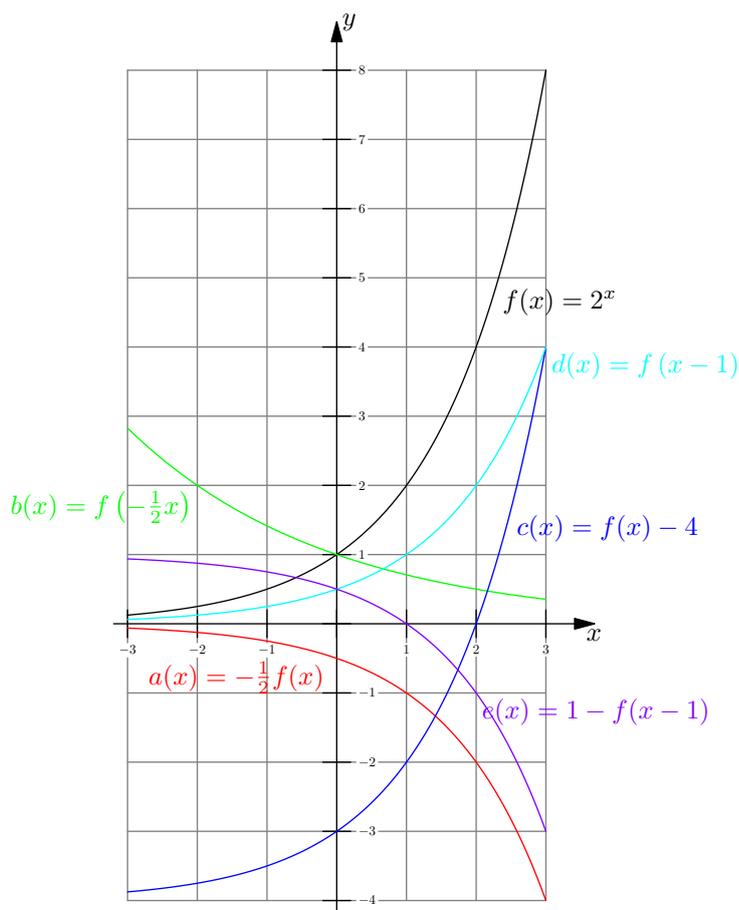
$b(x)$: Streckung in x -Richtung mit Faktor -2 (inkl. Spiegelung).

$c(x)$: Verschiebung in y -Richtung um -4 Einheiten.

$d(x)$: Verschiebung in x -Richtung um $+1$ Einheiten.

$e(x)$: Man betrachtet 3 Transformationen nacheinander:

- $e_1(x) = f(x - 1)$: Verschiebung in x -Richtung um $+1$ Einheiten.
- $e_2(x) = -e_1(x) = -f(x - 1)$: Spiegelung an der x -Achse (Streckung mit Faktor -1 in y -Richtung).
- $e(x) = e_2(x) + 1 = 1 - f(x - 1)$: Verschiebung um $+1$ Einheiten in y -Richtung.



✂ Lösung zu Aufgabe 367 ex-2000-jahre-zinseszins

Jedes Jahr wird das vorhandene Kapital mit 1.03 multipliziert. D.h. nach 2000 Jahren ist das Kapital $k(2000) = 0.01 \cdot 1.03^{2000} \approx 4.726 \cdot 10^{23}$ in CHF.

Zum Vergleich beträgt das Schweizer Bruttoinlandsprodukt ca. $6.58 \cdot 10^{11}$, das weltweite Bruttoproduct ca. $7.528 \cdot 10^{13}$. Die Inflation müsste sich also sehr nahe an den 3% befinden, was ein Realzins von nahezu Null bedeutet.

$$k(n) = 0.01 \cdot 1.03^n$$

✂ Lösung zu Aufgabe 368 ex-modellierungs-aufgaben

a) $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2410}}$ mit t in Jahren und m_0 die Ausgangsmasse (wird $m_0 = 1$ gewählt, kann die Funktion als Anteil der Ausgangsmasse interpretiert werden).

$$m(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2410}} \approx 0.99971, \text{ d.h. ein Verlust von } 1 - m(1) \approx 0.02875\%.$$

b) $a(t) = 10'000 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$ mit t in Stunden. Damit

$$a(1) \approx 12600, a(2) \approx 15870, a(5) \approx 31750, a(24) = 2'560'000.$$

c) $T(t) = 90 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{25}}$ mit t in Minuten.

$$T(10) \approx 68.21 \text{ in } ^\circ \text{C} \text{ und } T(120) \approx 3.231 \text{ in } ^\circ \text{C}.$$

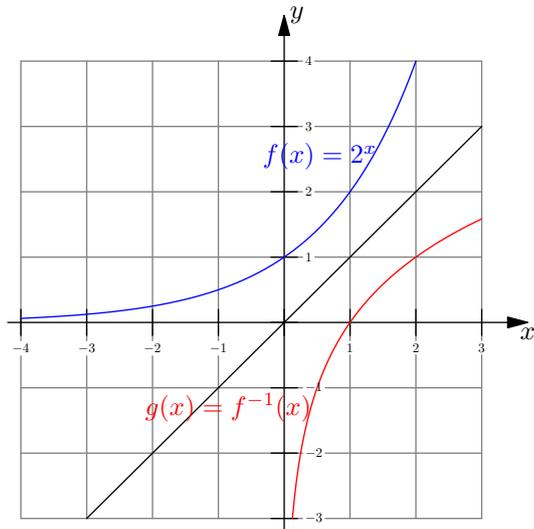
Löst man die Gleichung $90 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{25}} = 50$ erhält man $t \approx 21.20$ in Minuten.

✂ Lösung zu Aufgabe 371 ex-2hoch-umkehren

Vorgehen: Um z.B. $g(2)$ einzuzeichnen, muss folgende Frage beantwortet werden: «Für welchen x -Wert ist $f(x) = 2$?» Die Antwort ($x = 1$) kann auf dem Graphen von $f(x)$ abgelesen werden (wo ist der y -Wert gleich 2?). Konkret heisst das, wenn (a, b) ein Punkt auf $f(x)$ ist (d.h. $f(a) = b$), dann ist (b, a) ein Punkt $g(x)$.



Somit erhält man den Graphen von $g(x)$, wenn man den Graphen von $f(x)$ an der 45° Winkelhalbierenden spiegelt.



✂ Lösung zu Aufgabe 372 ex-spezielle-logarithmen-von-hand

- a) $\lg(10'000) = 4$ b) $\lg(0.1) = -1$ c) $\lg(10^{23}) = 23$ d) $\lg(0.0001) = -4$
- e) $\lg(1024) = 10$ f) $\lg(0.125) = -3$ g) $\ln(1) = 0$ h) $\ln(e^{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$

✂ Lösung zu Aufgabe 373 ex-einfache-exponentialgleichungen

- a) $8^x = 16 \iff x = \log_8(16) = \frac{4}{3}$ (man könnte die Gleichung so umformen, dass auf beiden Seiten die Basis 2 steht: $2^{3x} = 2^4$).
- b) $2^x = 7 \iff x = \log_2(7) \approx 2.807$
- c) $10^x = \frac{1}{2} \iff x = \lg\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0.3010$
- d) $a^x = 7 \iff x = \log_a(7)$ e) $2^x = b \iff x = \log_2(b)$ f) $z^x = y \iff x = \log_z(y)$

✂ Lösung zu Aufgabe 375 ex-logarithmen-von-hand

- a) $\log_2(32) = \log_2(2^5) = 5$
- b) $\log_3\left(\frac{1}{81}\right) = \log_3\left(\frac{1}{3^4}\right) = \log_3(3^{-4}) = -4$
- c) $\log_5(\sqrt{5}) = \log_5\left(5^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$
- d) $\log_9(27) = \log_9(3^3) = \log_9\left(\left((3^2)^{\frac{1}{2}}\right)^3\right) = \log_9\left(9^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}$
- e) $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\right) = \log_2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2^4}}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2^{\frac{4}{3}}}\right) = \log_2\left(2^{-\frac{4}{3}}\right) = -\frac{4}{3}$
- f) $\log_7(1) = \log_7(7^0) = 0$



✂ Lösung zu Aufgabe 376 ex-logarithmen-von-hand2

a) $3^{\log_3(7)} = 7$

b) $9^{\log_3(\sqrt{5})} = (3^2)^{\log_3(\sqrt{5})} = 3^{2 \cdot \log_3(\sqrt{5})} = (3^{\log_3(\sqrt{5})})^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$

c) $2^{-\log_8(125)} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^{-\log_8(125)} = (8^{-\log_8(125)})^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{8^{\log_8(125)}}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}$

✂ Lösung zu Aufgabe 377 ex-logarithmen-zeichnen

✂ Lösung zu Aufgabe 384 ex-logxy-und-logyx

Basiswechsel zur Basis e:

$\log_x(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(x)}$ und $\log_y(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(y)}$. Damit gilt

$$\log_x(y) = \frac{1}{\log_y(x)}$$

Oder mit der **Definition des Logarithmus**:

Sei $a = \log_x(y)$ und $b = \log_y(x)$. Damit gilt $x^a = y$ und $y^b = x$. Potenziert man die erste Gleichung mit $\frac{1}{a}$ erhält man $x = y^{\frac{1}{a}}$ und damit $y^b = y^{\frac{1}{a}}$, also $b = \frac{1}{a}$ und damit $\log_x(y) = \frac{1}{\log_y(x)}$.

✂ Lösung zu Aufgabe 385 ex-logarithmen-zerlegen

a) $\log\left(\frac{ab}{a+b}\right) = \log(a) + \log(b) - \log(a+b)$

b) $\log\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{x^2 - y^2}\right) = \frac{1}{4} \log(x) - \log(x+y) - \log(x-y)$

c) $\log_a\left(\frac{a \cdot b^c}{\sqrt[n]{a}}\right) = 1 + c \log_a(b) - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} + c \log_a(b)$

d) $\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \dots + \ln\left(\frac{999}{1000}\right) = (\ln(1) - \ln(2)) + (\ln(2) - \ln(3)) + \dots + \ln(999) - \ln(1000) = \ln(1) - \ln(1000) = 0 - \ln((2 \cdot 5)^3) = -3 \cdot (\ln(2) + \ln(5))$

✂ Lösung zu Aufgabe 386 ex-logarithmen-zusammenfassen

a) $\log(b) - \log(c+d) = \log\left(\frac{b}{c+d}\right)$

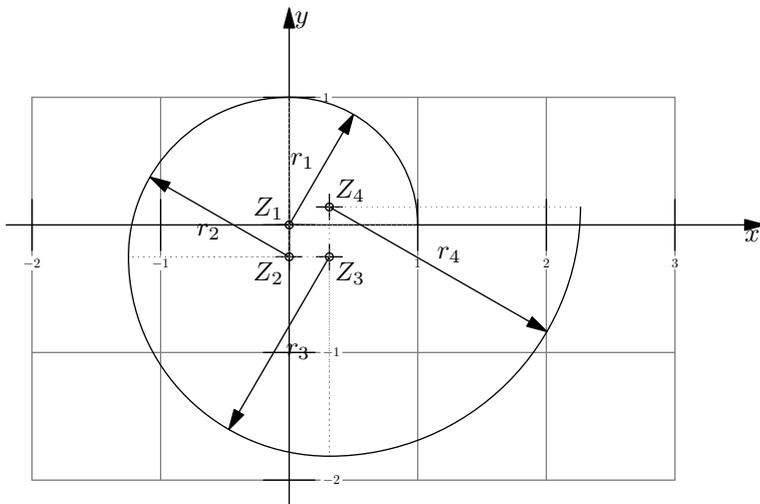
b) $2 \log(x) + 3 \log(y) - 5 \log(z) = \log(x^2) + \log(y^3) - \log(z^5) = \log\left(\frac{x^2 y^3}{z^5}\right)$

c) $\frac{1}{3}(\log(b) + 2 \log(c)) - \frac{1}{2}(5 \log(d) + \log(f)) = \log\left(\frac{\sqrt[3]{b \cdot c^2}}{\sqrt{d^5 f}}\right)$

d) $\ln(a+b) + 1 = \ln(a+b) + \ln(e) = \ln(e(a+b))$



✂ Lösung zu Aufgabe 387 ex-repe-geometrische-reihe



a)

b) Die Radien bilden eine geometrische Folge mit erstem Element $r_1 = 1$ und Quotient $q = \frac{5}{4}$. Die Folge der Bogenlängen $b_n = \frac{1}{4} \cdot 2\pi r_n = \frac{1}{2} \pi r_n$ ist ebenfalls geometrisch mit $q = \frac{5}{4}$. Die Länge der Spirale ist also

$$s_{20} = \sum_{i=1}^{20} b_i = b_1 \cdot \frac{q^{20} - 1}{q - 1} = \frac{1}{2} \pi \cdot \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^{20} - 1}{\frac{1}{4}} = 2\pi \cdot \left(\left(\frac{5}{4}\right)^{20} - 1 \right) \approx 538.7$$

c) Die x -Koordinate wird in jedem zweiten Schritt um die Differenz der Radien angepasst:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 = 0 \\ x_3 &= x_4 = x_2 + (r_3 - r_2) \\ x_5 &= x_6 = x_4 - (r_5 - r_4) \\ x_7 &= x_8 = x_6 + (r_7 - r_6) \\ &\dots = \dots \\ x_{19} &= x_{20} = x_{18} + (r_{19} - r_{18}) \end{aligned}$$

Die Differenzen $(r_3 - r_2), -(r_5 - r_4), +(r_7 - r_6), \dots$ bilden ebenfalls eine geometrische Folge mit $q = -\left(\frac{5}{4}\right)^2$. Die x -Koordinate x_{20} ist also die Summe dieser Differenzen:

$$x_{20} = \sum_{i=1}^9 (-1)^{(i+1)} \cdot (r_{2i+1} - r_{2i}) = \sum_{i=1}^9 (r_3 - r_2) \cdot \left(-\left(\frac{5}{4}\right)^2\right)^{i-1} = (r_3 - r_2) \cdot \frac{\left(-\left(\frac{5}{4}\right)^2\right)^9 - 1}{-\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1} \approx 6.892$$

✂ Lösung zu Aufgabe 388 ex-repe-textaufgaben-exponentiell

a) Exponentialfunktion: $m(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/2}$ mit t in Stunden (vom Beginn der Vorbereitung an gemessen), ergibt den noch vorhandenen Anteil als Zahl zwischen 1 und 0.

Damit ist $m\left(\frac{5}{6}\right) \approx 0.7492$. Es ist also noch knapp 75% des Isotops übrig.



- b) In 2 Tagen wird die Anzahl Erkrankter mit $\frac{42}{23}$ multipliziert. Die Exponentialfunktion kann also wie folgt geschrieben werden:

$$E(t) = 23 \cdot \left(\frac{42}{23}\right)^{\frac{t}{2}} \text{ mit } t \text{ in Tagen nach vorgestern.}$$

Übermorgen erwartet man nach diesem Modell $E(4) \approx 77$ Erkrankte und in einer Woche $E(9) \approx 346$ Erkrankte.

Für die Verdoppelungszeit x gilt $\left(\frac{42}{23}\right)^{\frac{x}{2}} = 2$, also $\frac{x}{2} = \log_{\frac{42}{23}}(2)$ und damit $x = 2 \frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{42}{23}\right)} = 2 \frac{\ln(2)}{\ln(42) - \ln(23)} \approx 2.302$ Tage.

✂ Lösung zu Aufgabe 389 ex-repe-graphen-zeichnen

- a) Graph von $f(x)$ mit TR überprüfen. Graph von $g(x)$ ist um 2 Einheiten nach **rechts** verschoben. $\log_2(x)$ ist die Umkehrfunktion von $f(x)$ und damit an der 45° Winkelhalbierenden gespiegelt.
- b) Graph von $f(x)$ mit TR überprüfen. Graph von $g(x)$ ist an y gespiegelt. Graph von $h(x)$ ist erst an x gespiegelt und dann um 2 Einheiten nach oben verschoben.

✂ Lösung zu Aufgabe 390 ex-repe-logarithmusgesetze

- a) Siehe Theorie.
- b) Man wendet die Basiswechselformel an: $\log_{\frac{1}{b}}(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b\left(\frac{1}{b}\right)} = \frac{\log_b(x)}{-1} = -\log_b(x)$, was zu beweisen war.
- c) Man wendet die Basiswechselformel an: $\log_{b^2}(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(b^2)} = \frac{\log_b(x)}{2} = \frac{1}{2} \log_b(x)$
- d) Es gilt $g_n = g_1 \cdot q^{n-1}$ und damit $a_n = \log_2(g_n) = \log_2(g_1 \cdot q^{n-1}) = \log_2(g_1) + (n-1) \cdot \log_2(q)$, was der Form einer arithmetischen Reihe mit erstem Glied $a_1 = \log_2(g_1)$ und Differenz $d = \log_2(q)$ entspricht.

✂ Lösung zu Aufgabe 391 ex-repe-logarithmen-von-hand

Hinweis: Die Aufgaben b) und c) können noch einfacher mit den Logarithmengesetzen berechnet werden, z.B. mit Basiswechsel zur Basis 2 bzw. 3.

- a) $\log_7\left(\frac{1}{49}\right) = -2$
- b) $\log_{16}(8) = \log_{16}(2^3) = \log_{16}\left(\left(16^{\frac{1}{4}}\right)^3\right) = \log_{16}\left(16^{\frac{3}{4}}\right) = \frac{3}{4}$
Oder $\log_{16}(8) = \frac{\log_2(8)}{\log_2(16)} = \frac{3}{4}$.
- c) $\log_{27}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right) = \log_{27}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3^2}}\right) = \log_{27}\left(\frac{1}{3^{\frac{2}{3}}}\right) = \log_{27}\left(3^{-\frac{2}{3}}\right) = \log_{27}\left(\left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{2}{3}}\right) = \log_{27}\left(27^{-\frac{2}{9}}\right) = -\frac{2}{9}$
- d) $5^{\log_5(10)} = 10$
- e) $125^{\log_5(4)} = (5^3)^{\log_5(4)} = 5^{3 \cdot \log_5(4)} = (5^{\log_5(4)})^3 = 4^3 = 64$
- f) $5^{\log_{125}(8)} = \left(125^{\frac{1}{3}}\right)^{\log_{125}(8)} = 125^{\frac{1}{3} \cdot \log_{125}(8)} = (125^{\log_{125}(8)})^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$