



✳ Lösung zu Aufgabe 503 ex-kugelvolumen

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi(f(x))^2 dx.$$

$$V_{\text{Einheitskugel}} = \int_{-1}^1 \pi \left(\sqrt{1-x^2} \right)^2 dx = \int_{-1}^1 \pi(1-x^2) dx = \pi \left(x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-1}^1 = \pi \left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right) = \frac{4\pi}{3}$$

Streckt man die Einheitskugel mit dem Streckungsfaktor r , erhält man eine Kugel mit Radius r . Das Volumen wird dabei mit r^3 multipliziert. Es gilt also:

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3$$

✳ Lösung zu Aufgabe 504 ex-kegelvolumen

Erst müssen die gegebenen Grössen festgelegt werden. Typischerweise werden Kreiskegel durch ihre Höhe h und den Kreisradius r der Basis gegeben.

Einen solchen Kegel erhalten wir, wenn wir den Graphen einer linearen Funktion $f(x)$ um die x -Achse rotieren. Am einfachsten wählt man $f(0) = 0$ (Kegelspitze) und $f(h) = r$ (Basismittelpunkt). Also

$$f(x) = \frac{r}{h}x$$

Damit ist das gesuchte Volumen

$$V = \int_0^h \pi(f(x))^2 dx = \int_0^h \pi \left(\frac{r}{h}x \right)^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^h = \pi \frac{r^2}{3h^2} \cdot h^3 - 0 = \frac{\pi}{3}r^2 \cdot h$$

✳ Lösung zu Aufgabe 505 ex-kugeloberflaeche

Wir betrachten die Kugel als Rotationskörper des Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ nach Rotation um die x -Achse.

Der Umfang eines Ringes an der Stelle x ist $2\pi f(x)$. Die infinitesimale Bogenlänge beträgt $\sqrt{1+(f'(x))^2} dx$. Und damit beträgt die Rechtecksfläche $2\pi f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} dx$. Die Oberfläche ist also

$$\begin{aligned} O_{\text{Kugel}} &= \int_{-1}^1 2\pi f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} dx = \int_{-1}^1 2\pi \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)\right)^2} dx = \\ &= 2\pi \cdot \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx = 2\pi \cdot \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}} dx = \\ &= 2\pi \cdot \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}} dx = 2\pi \cdot \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} dx = \\ &= 2\pi \cdot \int_{-1}^1 1 dx = 2\pi \cdot \left(x \Big|_{-1}^1 \right) = 2\pi \cdot 2 = 4\pi \end{aligned}$$

✳ Lösung zu Aufgabe 506 ex-torus

Ein Torus mit Radien R und r erhält man, wenn man den Kreis mit Radius r und Zentrum $(0, R)$ um die x -Achse rotiert.

Dazu betrachten wir den oberen Kreisbogen als Graphen einer Funktion $f(x)$ und den unteren Kreisbogen als Graphen einer Funktion $g(x)$:

$$f(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{und} \quad g(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$$

Das Volumen kann nun als Differenz der Volumina der Rotationskörper der Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ berechnet werden. Anstatt die ganzen Umformungen im Integral vorzunehmen, könnten im TR auch einfach die Funktionen