



c) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$. Die Schnittpunkte sind bei $x = 0$ und $x = 1$. Die gesuchte Fläche ist also:

$$\int_0^1 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - (0 - 0) = \frac{1}{3}$$

✂ Lösung zu Aufgabe 514 ex-repe-weg-aus-beschleunigung

a) Skizze.

$$b) a(t) = \begin{cases} \frac{1}{5}t & \text{für } 0 \leq t < 10 \\ -\frac{1}{5}(t-10) + 2 & \text{für } 10 \leq t \leq 20 \end{cases}$$

c) Die Geschwindigkeit zur Zeit t entspricht der Fläche unter der Beschleunigungskurve zwischen 0 und t . Für $t \leq 10$ erhält man:

$$v(t) = \int_0^t a(x) dx = \int_0^t \frac{1}{5}x dx = \frac{1}{10}x^2 \Big|_0^t = \frac{1}{10}t^2$$

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 10$ beträgt also $v(10) = \frac{1}{10} \cdot 10 = 10$ m/s.

Für $10 \leq t \leq 20$ gilt:

$$v(t) = 10 + \int_{10}^t a(x) dx = 10 + \int_{10}^t \left(-\frac{1}{5}(x-10) + 2 \right) dx = 10 + \left(-\frac{1}{10}x^2 + 4x \right) \Big|_{10}^t = 10 - \frac{1}{10}t^2 + 4t + 10 - 40 = -\frac{1}{10}t^2 + 4t - 20$$

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 20$ beträgt also $v(20) = -\frac{1}{10} \cdot 400 + 80 - 20 = -40 + 80 - 20 = 20$ m/s.

d) Die Positionsfunktion $s(t)$ entspricht der Fläche unter dem Geschwindigkeitsgraphen. Es gilt für $0 \leq t \leq 10$:

$$s(t) = \int_0^t v(x) dx = \int_0^t \frac{1}{10}x^2 dx = \frac{1}{30}x^3 \Big|_0^t = \frac{1}{30}t^3$$

Bis zum Zeitpunkt $t = 10$ wurde eine Strecke von $s(10) = \frac{1}{30} \cdot 1000 = \frac{100}{3} \approx 33.33$ m zurückgelegt.

Für $10 \leq t \leq 20$ gilt:

$$s(t) = \frac{100}{3} + \int_{10}^t v(x) dx = \frac{100}{3} + \int_{10}^t \left(-\frac{1}{10}x^2 + 4x - 20 \right) dx = \frac{100}{3} + \left(-\frac{1}{30}x^3 + 2x^2 - 20x \right) \Big|_{10}^t = \frac{100}{3} - \frac{1}{30}t^3 + 2t^2 - 20t + \frac{100}{3} - 200 + 200 = \frac{200}{3} - \frac{1}{30}t^3 + 2t^2 - 20t$$

Für $t = 20$ erhält man die Strecke nach 20 s:

$$s(20) = \frac{200}{3} - \frac{800}{3} + 800 - 400 = 200 \text{ m}$$

e) Nach 20 s hat die Bahn eine Geschwindigkeit von $20 \text{ m/s} = 72 \text{ km/h}$ und hat eine Strecke von 200 m zurückgelegt.

✂ Lösung zu Aufgabe 515 ex-repe-rotationsvolumen

$$V = \pi \int_1^4 f(x)^2 dx = \pi \int_1^4 \sqrt{x^2} dx = \pi \int_1^4 x dx = \pi \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^4 = \frac{15}{2} \pi \approx 23.56$$

Der Topf hat eine Höhe von 3 und einen Radius von 1 am Boden und 2 oben. Das Volumen eines Zylinders mit gleicher Höhe und Radius 1.5 hat ein Volumen von $V = \pi r^2 h = \pi \frac{9}{4} \cdot 3 \approx 21.21$.

Das Resultat ist also plausibel.