



21 Kurvendiskussion

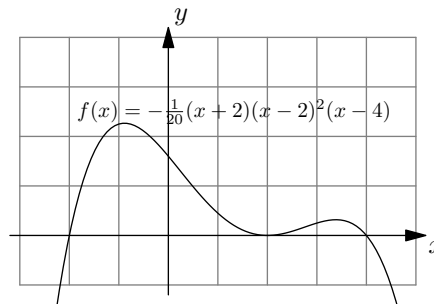
Das Resultat einer Kurvendiskussion ist die Beschreibung der «interessanten» Punkte eines Funktionsgraphen und dessen Symmetrien. Das sind Nullstellen, Extremalstellen, Wendepunkte, Pole und Asymptoten.

Definition 54 Nullstellen

Die Nullstellen einer Funktion $f(x)$ sind jene x -Werte, für die die Funktion Null liefert:

$$x \text{ ist Nullstelle von } f \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

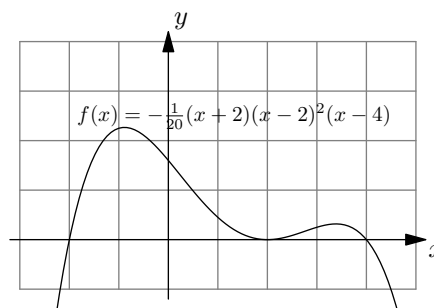
Das sind jene x -Werte, für die der Graph von f die x -Achse schneidet oder berührt.



Definition 55 Lokale und globale Extremalstellen

Ein **lokales Maximum** (bzw. **Minimum**) einer Funktion $f(x)$ tritt an der Stelle x auf, wenn f keine grösseren (bzw. kleineren) Werte in einer kleinen Umgebung von x liefert.

Ein **globales Maximum** (bzw. **Minimum**) einer Funktion ist der grösste (bzw. kleinste) Wert auf dem betrachteten Definitionsbereich. Falls es existiert, tritt dieses in einer Extremalstelle oder am Rand des Definitionsbereichs auf.



Definition 56 Zweite Ableitung

Gegeben ist eine Funktion $f(x)$. Die **zweite Ableitung** von $f(x)$ ist die Ableitung von $f'(x)$ und wird $f''(x)$ notiert. Analog dazu ist die dritte Ableitung $f'''(x)$ definiert.

Hinweis: Beschreibt $s(t)$ eine Distanz, ist die Ableitung (nach t) $s'(t)$ die Geschwindigkeit und $s''(t)$ die Beschleunigung.

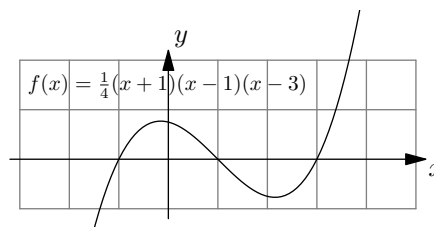
✂ **Aufgabe 423** Gegeben ist eine Funktion f und deren erste und zweite Ableitung. Wenn an einer Stelle x_0 die zweite Ableitung positiv (bzw. negativ) ist, was bedeutet das für den Graphen von f an der Stelle x_0 ?



Daraus leiten wir ab:

Merke Hinreichende Bedingung für lokale Extrema

$f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$ bedeutet **lokales Maximum**
 $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ bedeutet **lokales Minimum**



Wenn $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ kann es sich um ein Maximum, Minimum oder einen Sattelpunkt handeln.

Ein **Sattelpunkt** ist z.B. der Ursprung bei der Funktion $f(x) = x^3$.