



## 16 Quer durch den Gemüsegarten mit POV-Ray

In diesem Kapitel werden bereits behandelte Konzepte wie **Funktionen**, **Geometrie**, **Trigonometrie** und **Gleichungen** vertieft und zur Anwendung gebracht. Neben dem vertieften Verständnis und präziser Anwendung steht auch der spielerische Umgang mit Mathematik im Vordergrund. Es soll ein kleiner Einblick gewonnen werden, wohinter sich überall Mathematik verbirgt und wie damit kreativ umgegangen werden kann.

Neue Konzepte wie **Vektorgeometrie** oder **Parameterdarstellung von Kurven** werden eingeführt.

*POV-Ray* ist eine Programmiersprache, mit der drei-dimensionale Szenen beschrieben werden können. Die Darstellung dieser Szenen entsteht durch das Zurückverfolgen von Lichtstrahlen. Damit können annähernd fotorealistische Bilder erzeugt werden.

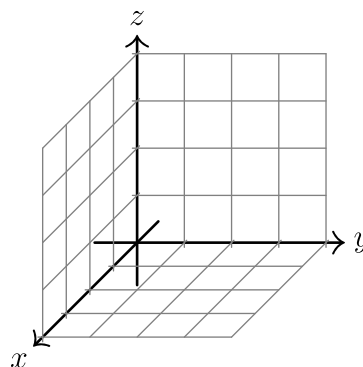
### 16.1 Vektorgeometrie

Die Vektorgeometrie fokussiert auf die algebraische Beschreibung von geometrischen Objekten im Raum (oder der Ebene), wie z.B. Punkte, Vektoren, Geraden und Ebenen.

#### 16.1.1 Koordinatensystem, Punkte

In der Regel wird ein **rechtsdrehendes** Koordinatensystem verwendet, d.h.  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse sind orientiert wie **Daumen** ( $x$ ), **Zeigefinger** ( $y$ ) und **Mittelfinger** ( $z$ ) der **rechten Hand**.

In Skizzen wird das Koordinatensystem im **Schrägbild** mit der  $x$ -Achse  $45^\circ$  nach unten links, der  $y$ -Achse nach rechts und der  $z$ -Achse nach oben dargestellt. Typischerweise ist eine  $x$ -Einheit auf dem Papier die Hälfte der negativen Summe einer  $y$ - und  $z$ -Einheit.



✂ **Aufgabe 294** Skizzieren Sie ein 3-dimensionales Koordinatensystem im Schrägbild und zeichnen Sie folgende Punkte ein:

- a)  $A = (3, 4, 2)$     b)  $B = (2, 5, 3)$     c)  $C = (-3, -1, 2)$     d)  $D = (-2, 1, -4)$     e)  $E = (-3, -3, -2)$

#### 16.1.2 Vektoren

Ein **Vektor** ist definiert durch eine **Richtung** und eine **Länge**. Dargestellt werden Vektoren z.B. als Pfeile. Relevant davon ist aber nur Richtung und Länge, aber **nicht die Lage** im Raum. D.h. ein Vektor kann durch unendlich viele Pfeile dargestellt werden.

Ein spezieller Vektor ist der **Nullvektor** mit der Länge Null, notiert als  $\vec{0}$ . Es macht mathematisch Sinn (einfachere Formeln und Definitionen) zu definieren, dass der Nullvektor jede mögliche Richtung hat. Er ist also zu jedem anderen Vektor parallel (und auch rechtwinklig).

Ein Vektor kann z.B. eine Verschiebung darstellen oder eine Geschwindigkeit.

Ein Vektor kann in seine **Komponenten** zerlegt werden, d.h. um wieviel der Vektor in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung zeigt.

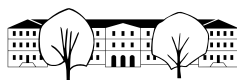
**Merke** Vektor

Ein Vektor wird mit einem Buchstaben und einem Pfeil darüber geschrieben. Die **Komponenten** werden zwischen runden Klammern übereinander geschrieben:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

✂ **Aufgabe 295** Zeichnen Sie folgende Vektoren als Pfeile (beginnend im Ursprung) im Schrägbild ein:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



**Merke** Ortsvektor

«Fixiert» man einen Vektor  $\vec{v}$  am Nullpunkt  $O = (0, 0, 0)$ , zeigt er zum Punkt  $P = (p_1, p_2, p_3)$  mit den gleichen Koordinaten wie die Komponenten von  $\vec{v}$ :

$$\vec{v} = \vec{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

$\vec{OP}$  ist der **Ortsvektor** von  $P$ .

Ein Punkt ist fixiert im Raum, im Gegensatz zu einem Vektor, der durch einen Pfeil mit beliebiger Lage dargestellt werden kann (Richtung und Länge sind aber fix).

**16.1.3 Länge eines Vektors**

✂ **Aufgabe 296** Bestimmen Sie die Länge folgender Vektoren:

a)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$     b)  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$     c)  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$     d)  $\vec{d} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$     e)  $\vec{e} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

✂ **Aufgabe 297** Finden Sie weitere Vektoren mit ganzzahligen Komponenten und ganzzahliger Länge.

**Merke** Betrag eines Vektors

Der **Betrag** (bzw. Länge) eines Vektors  $\vec{v}$  berechnet sich aus den Komponenten  $v_1, v_2$  und  $v_3$  wie folgt:

$$|\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right| =$$

**16.1.4 Vektor zwischen zwei Punkten**

✂ **Aufgabe 298** Gegeben sind die Punkte  $A = (3, -4, -1)$ ,  $B = (-1, 2, 3)$  und  $C = (1, -1, 1)$ . Berechnen Sie die Komponenten des Vektors a)  $\vec{a} = \vec{AB}$  (d.h. Startpunkt in  $A$ , Endpunkt in  $B$ ). Analog dazu b)  $\vec{b} = \vec{AC}$  und c)  $\vec{c} = \vec{CB}$ .

Was schliessen Sie aus dem Resultat von b) und c)? Machen Sie nötigenfalls eine Skizze der Situation.

**Merke** Vektor zwischen Punkten

Die Komponenten vom Vektor  $\vec{AB}$  (vom Punkt  $A$  zum  $B$ ) berechnet man, indem man von den Koordinaten des Endpunktes die Koordinaten des Anfangspunktes subtrahiert. Kurz:

**Endpunkt minus Anfangspunkt.**

**16.1.5 Summe zweier Vektoren**

**Merke** Summe von Vektoren

Die Summe zweier Vektoren  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$  erhält man, indem man den Anfang des zweiten Vektors  $\vec{b}$  an das Ende des Vektors  $\vec{a}$  hängt. Die Summe  $\vec{c}$  zeigt dann vom Anfang von  $\vec{a}$  zum Ende von  $\vec{b}$ .

Sind die Vektoren mit Komponenten gegeben, wird komponentenweise addiert:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$



✂ **Aufgabe 299** Bilden Sie alle möglichen Summen von:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

### 16.1.6 Skalare Multiplikation

Vektoren können mit Zahlen (Skalaren) multipliziert werden. Dabei ändert sich die Länge des Vektors. Er wird gestreckt (skaliert). Die Richtung bleibt gleich für positive Zahlen. Für negative Zahlen dreht sich die Richtung um.

**Merke** Skalare Multiplikation

Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  gilt:  $\lambda \vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \end{pmatrix}$  und  $|\lambda \vec{v}| = |\lambda| \cdot |\vec{v}|$

✂ **Aufgabe 300** Beweisen Sie die letzte Gleichung in obiger Merke-Box.

✂ **Aufgabe 301** Berechnen Sie: a)  $3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  b)  $-2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  c)  $-\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

✂ **Aufgabe 302** Skalieren Sie die Vektoren so, dass sie die gegebene Länge erreichen:

a)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ , Länge 6 b)  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ , Länge 1 c)  $\vec{c} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , Länge 1.

**Merke** Einheitsvektoren

Wird ein von Null verschiedener Vektor durch seine Länge dividiert, entsteht ein **Einheitsvektor** (Länge 1).

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \text{ hat die Länge 1 und Richtung von } \vec{v}.$$

✂ **Aufgabe 303** Ein durchschnittlicher Gleitschirm heute fliegt mit ca. 36 km/h über Grund und einer Gleitzahl von ca. 8 (Kehrwert der Steigung).

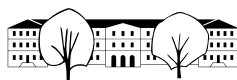
Man nimmt an, ein Gleitschirm fliegt bei Windstille genau in  $x$ -Richtung ( $z$ -Achse nach oben).

- a) Bestimmen Sie die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors in m/s.
- b) Es herrscht ein Gegenwind von 18 km/h. Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor über Grund und die effektive Gleitzahl.
- c) Gleiche Frage wie b) aber mit Rückenwind von 18 km/h.
- d\*) Es herrscht Seitenwind (d.h. genau in  $y$ -Richtung) von 18 km/h. Um wieviel Grad kommt der Gleitschirm vom Kurs ab?
- e\*) In welche Richtung (angegeben in Grad) muss der Gleitschirm fliegen, damit er bei 18 km/h Seitenwind effektiv in  $x$ -Richtung fliegt? Wie gross ist dann die effektive Gleitzahl? Konstruieren Sie erst, berechnen Sie dann in einem zweiten Schritt.

**Definition 36** Basisvektoren

Die **Basisvektoren** sind die Einheitsvektoren in der Richtung der Koordinatenachsen:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



**Merke**

Jeder Vektor kann als Summe von Vielfachen der Basisvektoren geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

## 16.2 Vektorgeometrie in der Ebene

✂ **Aufgabe 304** Bestimmen Sie die Vektoren mit gleicher Länge, die rechtwinklig zum gegebenen Vektor sind:

- a)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$     b)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$     c)  $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$     d)  $\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$     e)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

✂ **Aufgabe 305** Von einem gleichseitigen Dreieck in der  $x/y$ -Ebene kennt man zwei Punkte  $A$  und  $B$ . Berechnen Sie die Koordinaten des dritten Punktes  $C$ .

- a)  $A = (0, 0), B = (1, 0)$     b)  $A = (3, 2), B = (4, 2)$     c)  $A = (0, 1), B = (0, 2)$   
d)  $A = (-1, 0), B = (3, 3)$     e) allgemein.

✂ **Aufgabe 306** Gegeben sind zwei Kreise  $k_A$  und  $k_B$  durch ihre Zentren  $A$  und  $B$  und ihre Radien  $r_A$  und  $r_B$ . Ziel ist es, die Koordinaten der Schnittpunkte der Kreise zu bestimmen.

- a) Was sind die Bedingungen für den Abstand  $|\vec{AB}|$  und die Radien, damit es überhaupt Schnittpunkte gibt?  
b) Lösen Sie für den Fall  $A = (0, 0), B = (4, 0), r_A = 2$  und  $r_B = 3$ .  
c) Lösen Sie für den Fall  $A = (0, 0), B = (d, 0)$  mit  $r_A$  und  $r_B$  allgemein.  
d) Verallgemeinern Sie die Lösung von c) auf den gänzlich allgemeinen Fall.

### 16.2.1 Rotation

✂ **Aufgabe 307** Gesucht sind die Komponenten eines 2-dimensionalen Vektors mit Länge 1 und Winkel  $\alpha$  (gemessen von der positiven  $x$ -Achse in Richtung der  $y$ -Achse).

- a)  $\alpha = 90^\circ$     b)  $\alpha = 225^\circ$     c)  $\alpha = 150^\circ$     d)  $\alpha = 72^\circ$     e)  $\alpha$  allgemein.

✂ **Aufgabe 308** Es sollen die Koordinaten der Eckpunkte eines regulären Polygons (alle Seiten bzw. Winkel gleich lang bzw. gross) bestimmt werden, und zwar so, dass  $O = (0, 0)$  das Zentrum des Polygons ist und dass der Abstand der Eckpunkte von  $O$  genau 1 beträgt.

- a) Quadrat    b) Gleichseitiges Dreieck    c) Pentagon (Fünfeck)    d)  $n$ -gon (Vieleck mit  $n$  Ecken).

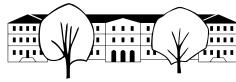
✂ **Aufgabe 309** Gegeben ist ein allgemeiner Punkt  $P = (x, y)$  und ein Drehwinkel  $\alpha$ . Gesucht sind die Koordinaten von  $P'$ , dem Bild von  $P$  nach der Drehung um den Ursprung mit dem Winkel  $\alpha$ .

- a) Machen Sie eine grosszügige Skizze der Situation (halbe Seite).  
b) Zeichnen Sie die Einheitsvektoren  $\vec{e}_1$  und  $\vec{e}_2$  ein, sowie ihre Bilder  $\vec{e}_1'$  und  $\vec{e}_2'$  nach der Drehung.  
c) Geben Sie die Komponenten von  $\vec{e}_1'$  und  $\vec{e}_2'$  an.  
d) Schreiben Sie den Vektor  $\vec{OP}$  als Summe von Vielfachen von  $\vec{e}_1$  und  $\vec{e}_2$ .  
e) Überzeugen Sie sich, dass sich  $\vec{OP}'$  analog zu  $\vec{OP}$  schreiben lässt und fassen Sie zusammen, um die Koordinaten von  $P'$  zu erhalten.

**Merke**    Rotation

Rotiert man einen Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  um den Winkel  $\alpha$  erhält man den Vektor

$$\vec{v}' =$$



**Merke** Rechtwinklige Vektoren in der Ebene

Gegeben ist ein Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Ein gleich langer Vektor  $\vec{u}$  rechtwinklig zu  $\vec{v}$  erhält man, wenn man die Komponenten vertauscht und danach bei einer Komponente das Vorzeichen ändert. Ändert man es bei der ersten Komponente, bewirkt dies eine Drehung um  $+90^\circ$  (d.h. in der Richtung von  $x$  nach  $y$ ). Ändert man nach dem Vertauschen das Vorzeichen der zweiten Komponente, bewirkt dies eine Rotation um  $-90^\circ$ . Konkret:

$$\vec{u}_{+90^\circ} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{u}_{-90^\circ} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

### 16.3 Repetitionsaufgaben

✂ **Aufgabe 310** Gegeben sind 3 Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

- Zeichnen Sie die drei Vektoren im Schrägbild als Ortsvektoren ein.
- Bestimmen Sie die Komponenten von  $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  und  $\vec{e} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}$ .
- Bestimmen Sie die exakten Längen der Vektoren als Wurzelterme.
- Bestimmen Sie die Komponenten des Vektors  $\vec{f}$  mit Länge 4 und gleicher Richtung wie  $\vec{a}$ .
- Bestimmen Sie die Komponenten des Vektors  $\vec{e}$  nach einer Drehung um  $-90^\circ$  um die  $x$ -, bzw.  $y$ -, bzw.  $z$ -Achse.

✂ **Aufgabe 311** Von einem Würfel  $ABCDEFGH$  kennt man den Punkt  $A = (-2, 3, -1)$  und die drei Nachbarnpunkte  $B = (-1, 5, -3)$ ,  $D = (0, 4, 1)$  und  $E = (0, 1, -2)$ .

Die Punkte  $ABCD$  bilden ein Quadrat, die Punkte  $EFGH$  ebenfalls, wobei  $E$  Nachbar von  $A$ ,  $F$  von  $B$  und  $G$  von  $C$  ist.

Machen Sie eine Skizze der Situation.

Überprüfen Sie, ob die Abstände der Punkte korrekt sind (d.h. ob es sich überhaupt um Eckpunkte eines Würfels handeln kann).

Berechnen Sie anschliessend die Koordinaten der fehlenden Punkte.

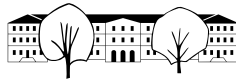
✂ **Aufgabe 312** Gegeben sind die Punkte  $A = (-2, 1)$  und  $B = (3, -1)$ .

- Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte  $C$ , die mit  $A, B$  ein gleichseitiges Dreieck bilden.
- Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte  $C$  und  $D$ , die mit  $A, B$  ein Quadrat bilden.
- Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte  $C$ , die mit  $A, B$  ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck bilden, wobei  $AB$  die Hypotenuse sein soll.

✂ **Aufgabe 313** Zeichnen Sie den Punkt  $A = (2, 3, 1)$  im Schrägbild ein. Von einem Punkt  $B$  weiss man, dass er die  $x$ -Koordinate 4 hat und sein Bild im Schrägbild genau auf dem Bild von  $A$  liegt. Bestimmen Sie durch Konstruieren und Ablesen seine  $y$ - und  $z$ -Koordinaten.

Überprüfen Sie Ihre Konstruktion und Abschätzung, indem Sie die zweidimensionalen Komponenten der dreidimensionalen Einheitsvektoren aufschreiben und entsprechend addieren. Z.B. ist  $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$ .

Das Bild von  $A$  ist dann  $2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ .



## 16.4 «Sanduhr»-Roboter

Im Schaukasten vor dem H47 ist eine «Sanduhr» ausgestellt. Zwei Servo-Motoren steuern zwei Arme, die wieder über zwei Arme verbunden sind. Servo-Motoren können direkt einen gegebenen Winkel anfahren (normalerweise zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$ ).

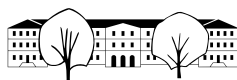
### 16.4.1 Skizze und Daten

- Abstand der Motorachsen:  $m \cdot 2$  (4 cm)
- Länge der ersten Arme:  $r_1$  (8 cm)
- Länge der zweiten Arme:  $r_2$  (10 cm)
- Schnittpunkt der zweiten Arme  $P = (x, y)$
- Nullpunkt: zwischen den Motorachsen
- $x$ -Achse durch die Motorachsen,  $y$ -Achse nach oben
- Koordinaten der Motorachsen:  $M_1 = (-m, 0)$ ,  $M_2 = (m, 0)$
- Motorenwinkel  $\alpha_1, \alpha_2$ , gemessen von der  $x$ -Achse aus.

✳ **Aufgabe 314** Gegeben ist  $P = (x, y)$ . Gesucht sind die entsprechenden Winkel der Motoren.

Formulieren Sie die Lösung als Abfolge von Berechnungen. Benutzen Sie dazu die definierten Variablen und nicht die Zahlenwerte. D.h.  $m, r_1, r_2, x$  und  $y$ . Für Zwischenergebnisse werden neue Variablen definiert.

✳ **Aufgabe 315** Gegeben sind die Motorenwinkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ . Gesucht sind die Koordinaten von  $P = (x, y)$ .



## 16.5 Lösungen

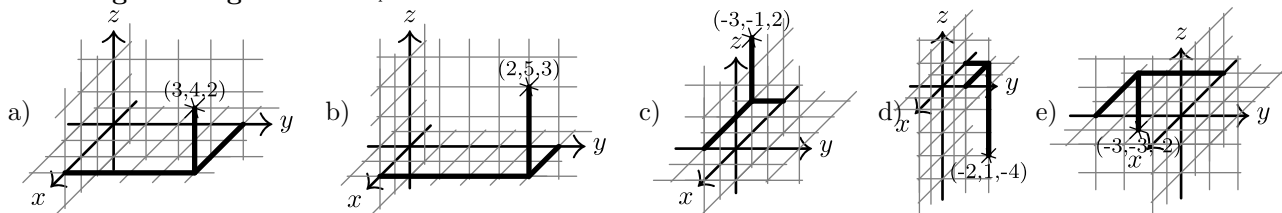
Hinweise zu den Symbolen:

✂ Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

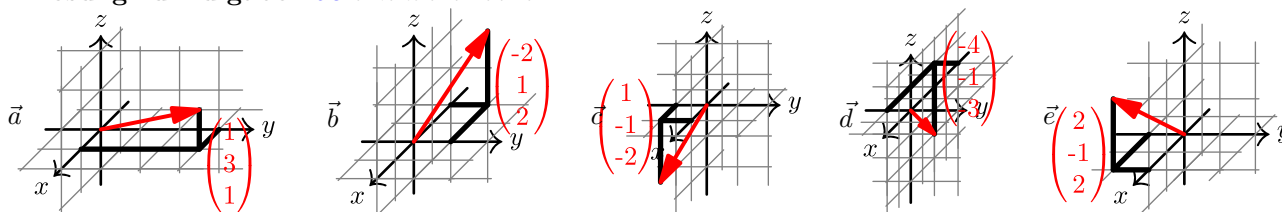
✂ Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**

✂ Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

### ✂ Lösung zu Aufgabe 294 ex-punkte-einzeichnen



### ✂ Lösung zu Aufgabe 295 ex-vektoren-einzeichnen



### ✂ Lösung zu Aufgabe 296 ex-vektor-laenge

a)  $|\vec{a}| = 2$     b)  $|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$     c)  $|\vec{c}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$   
 d)  $|\vec{d}| = \sqrt{(-6)^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{49} = 7$     e)  $|\vec{e}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

### ✂ Lösung zu Aufgabe 298 ex-vektor-zwischen-Punkten

Man rechnet jeweils die «Endpunkts- minus Anfangspunktskoordinaten», um die Komponenten zu erhalten. Oder formal:  $\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$ .

a)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 - 3 \\ 2 - (-4) \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

b)  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

c)  $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) Die Verschiebung von A nach C ist offenbar die genau gleiche, wie jene von C nach B. C liegt also genau in der Mitte zwischen A und B.

### ✂ Lösung zu Aufgabe 299 ex-vektoraddition

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\vec{b}$		$\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$
$\vec{c}$			$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$

und  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ .



✂ Lösung zu Aufgabe 301 ex-vektoren-skalieren

a)  $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$     b)  $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$     c)  $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

✂ Lösung zu Aufgabe 302 ex-vektoren-auf-laenge-skalieren

a)  $|\vec{a}| = 3$ , also muss mit  $\lambda = 2$  multipliziert werden, um die Länge 6 zu erhalten:  $2\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ . Es könnte auch mit  $\lambda = -2$  multipliziert werden. Allerdings wird dann die Richtung umgekehrt, was in den meisten Fällen unerwünscht ist.

b)  $|\vec{b}| = 7$ , also muss durch 7 dividiert werden:  $\frac{1}{7}\vec{b} = \begin{pmatrix} 3/7 \\ -6/7 \\ -2/7 \end{pmatrix}$ .

c) Um die Länge 1 zu erhalten, wird der Vektor durch seine eigene Länge dividiert:  $\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

✂ Lösung zu Aufgabe 303 ex-gleitschirm-im-wind

a) 36 km/h entspricht genau 10 m/s. Der Geschwindigkeitsvektor ist also  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$  mit Gleitzahl  $\frac{10}{-z} = 8$  (sinken bedeutet negative Geschwindigkeit in  $z$ -Richtung), also  $z = -1.25$  und damit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -1.25 \end{pmatrix}$$

b) 18 km/h Gegenwind entspricht dem Vektor  $\vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Die Summe aus Fluggeschwindigkeit gegenüber der Luft und der Windgeschwindigkeit ergeben die effektive Fluggeschwindigkeit über Grund:

$$\vec{v}_{\text{eff}} = \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1.25 \end{pmatrix}$$

und damit eine Gleitzahl von  $5/1.25 = 4$ .

c) Gleitzahl  $15/1.25 = 12$ .

d) Jetzt ist  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$  und damit  $\vec{v}_{\text{eff}} = \vec{v} + \vec{w} \approx \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -1.25 \end{pmatrix}$  Die Geschwindigkeit über Boden ist nun  $\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ , d.h. der Tangens vom Winkel ist  $\frac{5}{10}$ . Der gesuchte Winkel ist also  $\arctan(0.5) \approx 26.57^\circ$





- e) In der  $x/y$ -Ebene zeichnet man einen Kreis  $k$  um den Ursprung mit Radius 10. Das sind die Punkte, die bei Windstille nach 1 s erreicht werden. Diesen Kreis verschiebt man um 5 Einheiten in  $y$ -Richtung (Wind in 1 s) und erhält alle Punkte  $k'$ , wo sich der Gleitschirm mit Seitenwind nach 1 s befinden kann. Der Schnitt  $P$  von  $k'$  mit der  $x$ -Achse ergibt den Endpunkt des effektiven Geschwindigkeitsvektors. Davon subtrahiert man den Windvektor um den Geschwindigkeitsvektor des Gleitschirms gegenüber der Luft zu erhalten.

Für die Berechnung sucht man eine  $x$ -Koordinate so, dass der Schnittpunkt  $P = (x, 0, 0)$  den Abstand 10 vom Punkt  $Q = (0, 5, 0)$  hat. Also

$$\begin{aligned} |\vec{PQ}| &= 10 \\ \sqrt{x^2 + 5^2} &= 10 && |(\cdot)^2 \\ x^2 + 25 &= 100 && | : -25 \\ x^2 &= 75 \\ x &= \pm\sqrt{75} \end{aligned}$$

Damit ist  $\vec{v}_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} \sqrt{75} \\ 0 \\ -1.25 \end{pmatrix}$  und daraus findet man  $\vec{v} = \vec{v}_{\text{eff}} - \vec{w} = \begin{pmatrix} \sqrt{75} \\ -5 \\ -1.25 \end{pmatrix}$ .

Alternativ hätte man einen 2-dimensionalen Vektor mit  $y$ -Komponente  $-5$  (Wind kompensieren) und Länge 10 bestimmen können.

Die Gleitzahl ist die Geschwindigkeit über Boden dividiert durch die Vertikalgeschwindigkeit, also

$$\frac{\sqrt{75}}{1.25} \approx 6.928$$

✂ Lösung zu Aufgabe 304 ex-rechtwinklige-vektoren-in-der-ebene

- a)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$     b)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$     c)  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$     d)  $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$     e)  $\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

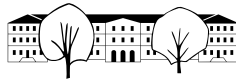
✂ Lösung zu Aufgabe 305 ex-gleichseitiges-dreieck

- a) Aus Symmetriegründen ist die  $x$ -Koordinate von  $C$   $\frac{1}{2}$ . Wir suchen also die  $y$ -Koordinate so, dass  $|\vec{AC}| = |\vec{AB}| = 1$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2} &= 1 && |(\cdot)^2 \\ \frac{1}{4} + y^2 &= 1 && | - \frac{1}{4} \\ y^2 &= \frac{3}{4} \\ y &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Damit sind die Koordinaten  $C = \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

- b) Die Situation ist bis auf eine Verschiebung um  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  die gleiche wie in a). Die Lösung ist also auch verschoben, also  $C_1 = \left(\frac{7}{2}, 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  und  $C_2 = \left(\frac{7}{2}, 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .
- c) Die Seitenlänge ist immer noch 1, die Situation ist um  $90^\circ$  gedreht. Damit sind die Lösungen:  $C_{1,2} = \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ .



d)  $\vec{v} = \vec{AB} = (4, 3)$  mit Länge  $|\vec{v}| = 5$ . Mit Seitenlänge 5 ist die Höhe im gleichseitigen Dreieck  $h = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{75}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Beachten Sie, dass die Höhe im gleichseitigen Dreieck  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  mal so lang wie die Seite ist.

Vom Punkt  $A$  muss also  $\frac{5}{2}$  Einheiten in die Richtung von  $\vec{v}$  gegangen werden (also  $\frac{5}{2} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ ), und dann  $5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$  Einheiten rechtwinklig dazu.

Der Vektor  $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$  ist rechtwinklig auf  $\vec{v}$ .

Damit ist  $\vec{OC} = \vec{OA} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} \pm \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$C_1 = \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} + 2\sqrt{3}\right)$  und  $C_2 = \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} - 2\sqrt{3}\right)$

e) Sei  $\vec{v} = \vec{AB}$  und  $\vec{u}$  ein Vektor rechtwinklig zu  $\vec{v}$  mit gleicher Länge. Die Höhe ist  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  mal so lang wie die Seitenlänge  $|\vec{v}|$ . Damit gilt:

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{v} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{u}$$

### ✂ Lösung zu Aufgabe 306 ex-kreise-schneiden

a) Die Kreise schneiden sich nicht, wenn der Abstand zu gross, oder ein Kreis innerhalb des anderen liegt. Zu gross ist der Abstand wenn  $\overline{AB} > r_A + r_B$ .  $k_A$  liegt innerhalb von  $k_B$  wenn  $\overline{AB} + r_A < r_B$ . Und umgekehrt wenn  $\overline{AB} + r_B < r_A$ . Ist keine der drei Bedingungen erfüllt, schneiden sich die Kreise.

b) Siehe c). Man erhält  $p = \frac{2^2 - 3^2 + 4^2}{2 \cdot 4} = \frac{11}{8}$  und  $h = \sqrt{2^2 - \left(\frac{11}{8}\right)^2} = \frac{3}{8} \sqrt{15}$ . Das entspricht direkt den Koordinaten. Und damit ist  $C_{1,2} \approx (1.375, \pm 1.452)$ .

c) Sei  $C$  ein Schnittpunkt. Mit der Höhe  $h = h_c$  und dem Höhenfusspunkt  $H$  entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke,  $\triangle AHC$  und  $\triangle CHB$ . Seien  $p = \overline{AH}$  und  $q = \overline{HB}$ . Damit ist  $p + q = d$ , bzw.  $q = d - p$ . Die Koordinaten von  $C$  sind also  $C = (p, \pm h)$ .

In den rechtwinkligen Dreiecken gilt  $r_A^2 = p^2 + h^2$  und  $r_B^2 = q^2 + h^2$ . Löst man nach  $h$  auf und setzt gleich erhält man:  $r_A^2 - p^2 = r_B^2 - q^2$ . Ersetzt man noch  $q$  erhält man:

$$\begin{aligned} r_A^2 - p^2 &= r_B^2 - (d - p)^2 \\ r_A^2 - p^2 &= r_B^2 - d^2 + 2dp - p^2 && | + p^2 + d^2 - r_B^2 \\ r_A^2 - r_B^2 + d^2 &= 2dp && | : 2d \\ p &= \frac{r_A^2 - r_B^2 + d^2}{2d} \end{aligned}$$

Damit ist die Strecke  $\overline{AH}$  bekannt. Die Höhe ergibt sich durch Einsetzen:

$$h^2 = r_A^2 - p^2 \quad h = \pm \sqrt{r_A^2 - p^2}$$

d) Man setzt  $d = |\vec{AB}|$  und berechnet wieder  $p$  und  $h$ . Anstatt um  $p$  Einheiten in  $x$ -Richtung muss  $p$  Einheiten in die Richtung von  $\vec{AB}$  gegangen werden.

Sei  $\vec{v} = \vec{AB}$  und  $\vec{u}$  der zu  $\vec{v}$  rechtwinklige Vektor mit gleicher Länge. Dann ist

$$\vec{OC} = \vec{OA} + p \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \pm h \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$



✂ Lösung zu Aufgabe 307 ex-einheitskreis-vektoren

a)  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Katheten im  $45^\circ/45^\circ/90^\circ$  Dreieck mit Hypotenuse 1:  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

c) Gleichseitige Dreieck über  $(0,0) - (0,1)$ :  $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

d)  $\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(72^\circ) \\ \sin(72^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{4} \\ \frac{2(5+\sqrt{5})}{4} \end{pmatrix}$  (Mit dem Taschenrechner)

e) Koordinaten eines Punktes auf dem Einheitskreis:  $\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ .

✂ Lösung zu Aufgabe 308 ex-regulaere-polygone

Die Punkte dieser Vielecke liegen auf dem Einheitskreis. Mit  $\cos$  und  $\sin$  lassen sich die Punkte mit dem Winkel beschreiben. Der allgemeine Fall ist also

$$P_i = \left( \cos \left( 360^\circ \cdot \frac{i}{n} \right), \sin \left( 360^\circ \cdot \frac{i}{n} \right) \right) \quad \text{mit } i = 0 \dots (n-1)$$

a)  $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$

b)  $(1, 0), \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$

c)  $(1, 0), (\cos(72^\circ), \sin(72^\circ)), \text{etc.}$

✂ Lösung zu Aufgabe 309 ex-rotations-formel-herleiten

c)  $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ .

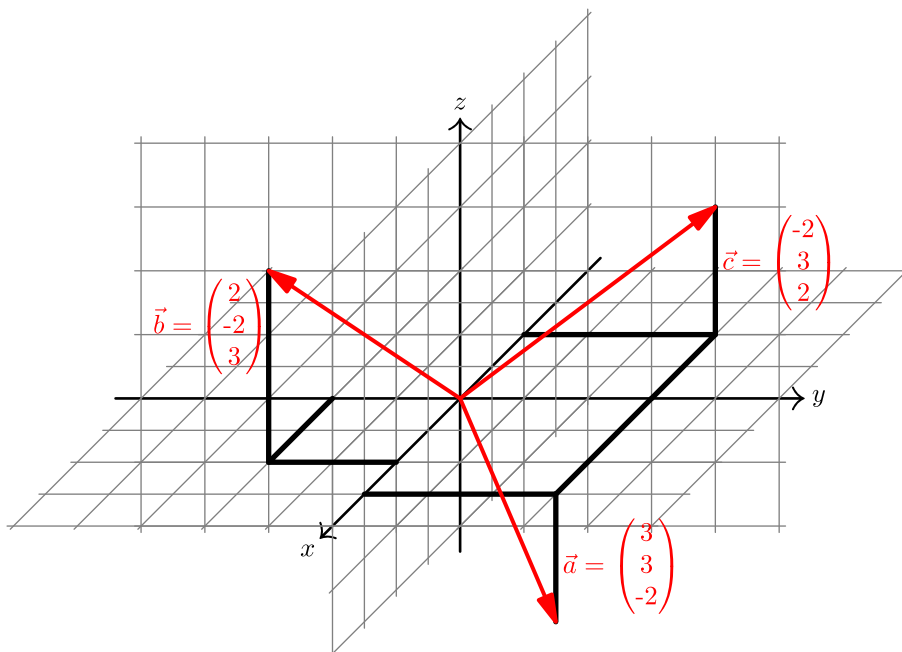
d)  $\vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$

e)  $\vec{OP}' = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos(\alpha) - y \sin(\alpha) \\ x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

und damit ist  $P' = (x \cos(\alpha) - y \sin(\alpha), x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha))$ .

✂ Lösung zu Aufgabe 310 ex-repevektor-lage-summe-laenge

a)





b)  $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{e} = \begin{pmatrix} 20 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

c)  $|\vec{a}| = \sqrt{22}$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{17}$ ,  $|\vec{c}| = \sqrt{17}$ .

- d) Dividiert man den Vektor durch seine Länge, erhält man einen Vektor der Länge 1 mit gleicher Richtung. Dieser ist noch mit 4 zu multiplizieren:

$$\vec{f} = 4 \cdot \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{22}} \vec{a} = 4 \cdot \frac{\sqrt{22}}{22} \vec{a} = \frac{2}{11} \sqrt{22} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{11} \sqrt{22} \\ \frac{6}{11} \sqrt{22} \\ -\frac{4}{11} \sqrt{22} \end{pmatrix}$$

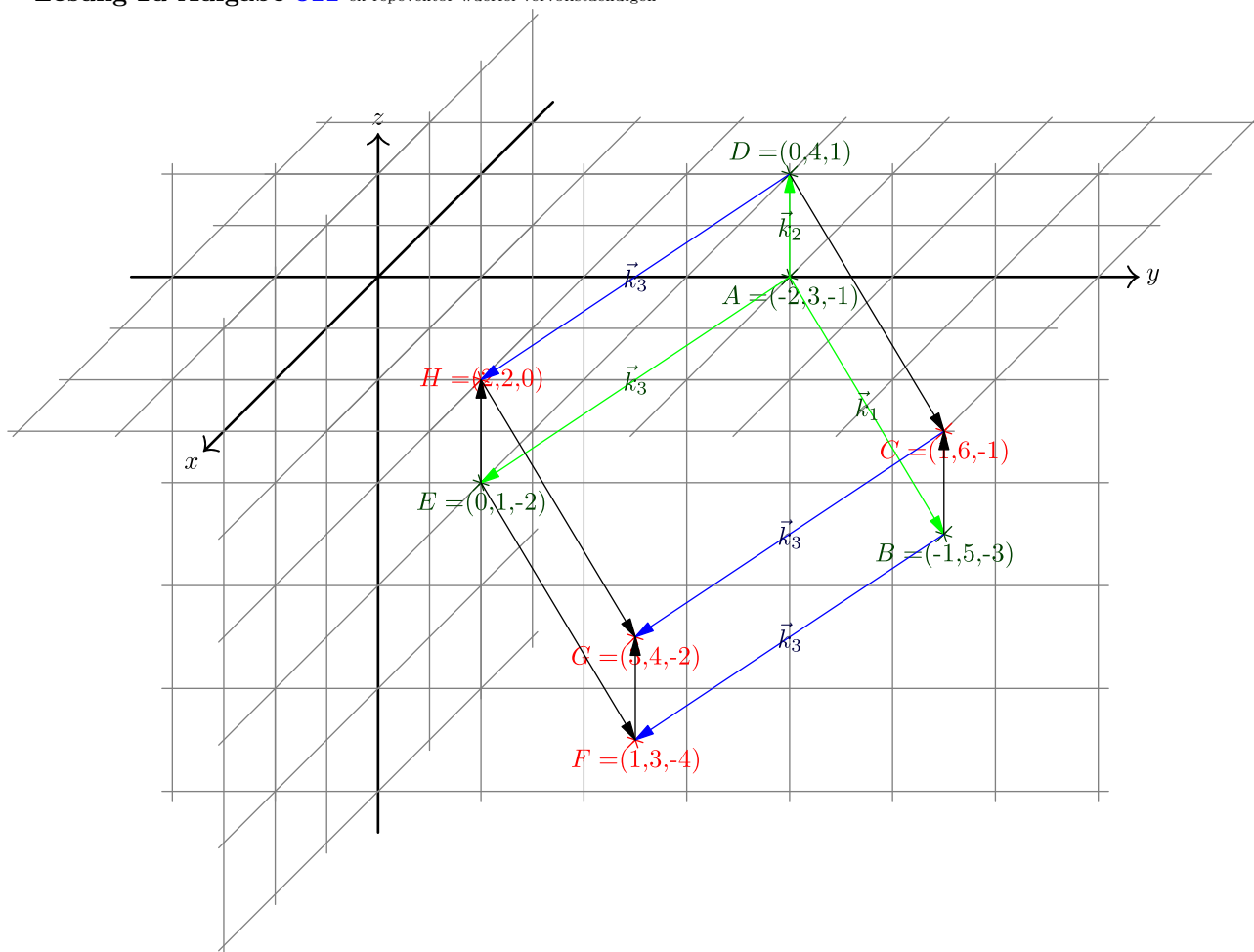
e)  $\vec{e} = \begin{pmatrix} 20 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

Drehung um  $-90^\circ$  um die  $x$ -Achse:  $\begin{pmatrix} 20 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$ . (D.h.  $z$  dreht auf  $y$ , also nach dem Vertauschen das Vorzeichen der  $z$ -Komponente ändern).

Drehung um  $-90^\circ$  um die  $y$ -Achse:  $\begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ 20 \end{pmatrix}$ . ( $x$  dreht auf  $z$ ).

Drehung um  $-90^\circ$  um die  $z$ -Achse:  $\begin{pmatrix} -20 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}$ . ( $y$  dreht auf  $x$ ).

✂ Lösung zu Aufgabe 311 ex-repevektor-wuerfel-vervollstaendigen





Man berechnet erst die Vektoren der Kanten:

$$\vec{k}_1 = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{k}_2 = \vec{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{k}_3 = \vec{AE} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Daraus ist sofort ersichtlich, dass die Kanten alle die gleiche Länge haben. Es müsste noch überprüft werden, ob die Kanten auch rechtwinklig aufeinander stehen. Dazu fehlt uns z.Z. aber noch ein Hilfsmittel.

Es gilt nun z.B.  $\vec{BC} = \vec{k}_2$  oder  $\vec{DC} = \vec{k}_1$ . Und damit z.B.

$$\vec{OC} = \vec{OD} + \vec{DC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ Also } C = (1, 6, -1).$$

Die Punkte  $F$ ,  $G$  und  $H$  erhält man, indem man die Punkte  $B$ ,  $C$  und  $D$  um  $\vec{k}_3$  verschiebt:

$$F = (1, 3, -4), G = (3, 4, -2) \text{ und } H = (2, 2, 0).$$

✂ Lösung zu Aufgabe 312 ex-repevektor-ebene-figures

- a) Die Höhe im gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge  $s$  ist  $\frac{\sqrt{3}}{2}s$  (Pythagoras). Sei  $\vec{v} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  ein dazu rechtwinkliger Vektor mit gleicher Länge  $s = |\vec{v}| = |\vec{u}|$ .

Damit ist  $\vec{OC} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{v} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}$ . Eingesetzt:

$$\vec{OC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \pm \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

- b) Sei  $\vec{u}$  wie oben. Also sind  $\vec{OC} = \vec{OB} \pm \vec{u}$  und  $\vec{OD} = \vec{OA} \pm \vec{u}$ . In Zahlen:

$$\vec{OC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{OD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Also  $C_1 = (5, 4)$ ,  $D_1 = (0, 6)$  oder  $C_2 = (1, -6)$ ,  $D_2 = (-4, -4)$ .

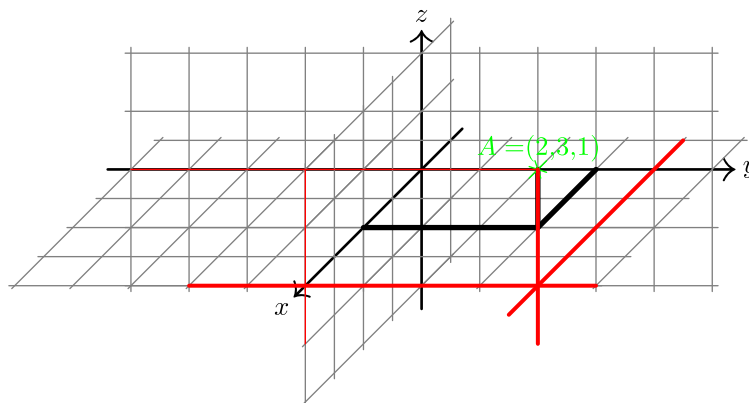
- c) Die Höhe im rechtwinklig gleichschenkligen Dreieck mit Hypotenuse  $c$  ist  $h = \frac{1}{2}c$ . Damit ist  $\vec{OC} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{v} \pm \frac{1}{2}\vec{u}$ . Eingesetzt:

$$\vec{OC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \pm 1 \\ \pm \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

✂ Lösung zu Aufgabe 313 ex-repevektor-koordinaten-einzeichnen-ablesen

Auf der  $xy$ -Ebene (bzw. auf der  $xz$ -Ebene) zeichnet man die Gerade  $x = 6$  (d.h. alle Punkte mit  $x$ -Koordinate 4). Diese Gerade schneidet man mit einer Parallelen zu  $z$ -Achse (bzw.  $y$ -Achse), um so die Stützlinien zu konstruieren.

Damit liest man ab:  $B = (4, 4, 2)$





Die Einheitsvektoren im Schrägbild sind:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit hat das Bild von  $A$  den Ortsvektor  $2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 = 2 \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Das Bild von  $B$  hat den Ortsvektor  $4\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = 4 \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Damit hat man also exakt abgelesen.

**\*Lösung zu Aufgabe 314** ex-sanduhr-roboter-steuerung

Man berechnet erst die Punkte  $Q_1$  und  $Q_2$  der Armgelenke.

Es gilt  $Q_1 = k(P, r_2) \cap k(M_1, r_1)$  und analog dazu  $Q_2 = k(P, r_2) \cap k(M_2, r_1)$ .

Mit der Lösung der Aufgabe 306 kann die Berechnung wie folgt durchgeführt werden:

Sei  $d = |M_1 P| = \sqrt{(x - (-m))^2 + y^2} = \sqrt{(x + m)^2 + y^2}$ .

Sei  $p = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}$  und daraus

$$h = \sqrt{r_1^2 - p^2}$$

Für den linken Motor muss der Punkt  $Q_1$  links vom Vektor  $M_1 P$  liegen. Der Vektor muss also um  $+90^\circ$ , d.h. nach dem Vertauschen der Komponenten, muss das Vorzeichen der ersten Komponente geändert werden:

$$\vec{v} = M_1 P = \begin{pmatrix} x + m \\ y \end{pmatrix} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} -y \\ x + m \end{pmatrix}$$

Damit ist  $\vec{w} = M_1 Q_1 = \frac{p}{d} \vec{v} + \frac{h}{d} \vec{u} = \frac{1}{d} (p\vec{v} + h\vec{u})$ .

Die Komponente von  $\vec{w}$  sind also

$$w_1 = \frac{1}{d} \cdot (p \cdot (x + m) + h \cdot (-y)) \text{ und}$$

$$w_2 = \frac{1}{d} \cdot (p \cdot y + h \cdot (x + m)).$$

Um den Winkel des Vektors  $\vec{w}$  verwendet man am einfachsten arccos oder arccotan (Hurra! eine Anwendung für cotan), weil diese Funktionen Winkel zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$  liefern und eine Fallunterscheidung bzw. Umrechnung unnötig ist. Leider gibt es auf Computern die arccotan Funktion meist nicht.

Es gilt  $\cos(\alpha_1) = \frac{w_1}{|\vec{w}|}$  und damit

$$\alpha_1 = \arccos\left(\frac{w_1}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}\right).$$

Die Berechnung für  $\alpha_2$  ist fast identisch (Änderungen sind rot markiert):

$$d = |M_2 P| = \sqrt{(x - (+m))^2 + y^2} = \sqrt{(x - m)^2 + y^2}.$$

Sei  $p = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}$  und daraus

$$h = \sqrt{r_1^2 - p^2}$$

Für den **rechten** Motor muss der Punkt  $Q_2$  **rechts** vom Vektor  $M_2 P$  liegen. Der Vektor muss also um  $-90^\circ$ , d.h. nach dem Vertauschen der Komponenten, muss das Vorzeichen der **zweiten** Komponente geändert werden:

$$\vec{v} = M_2 P = \begin{pmatrix} x - m \\ y \end{pmatrix} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} y \\ m - x \end{pmatrix}$$

Damit ist  $\vec{w} = M_2 Q_2 = \frac{p}{d} \vec{v} + \frac{h}{d} \vec{u} = \frac{1}{d} (p\vec{v} + h\vec{u})$ .

Die Komponente von  $\vec{w}$  sind also

$$w_1 = \frac{1}{d} \cdot (p \cdot (x - m) + h \cdot y) \text{ und}$$

$$w_2 = \frac{1}{d} \cdot (p \cdot y + h \cdot (m - x)).$$

Es gilt  $\cos(\alpha_2) = \frac{w_1}{|\vec{w}|}$  und damit

$$\alpha_2 = \arccos\left(\frac{w_1}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}\right).$$



**\* Lösung zu Aufgabe 315** ex-sanduhr-roboter-inverses-problem

Mit Hilfe von  $\cos$  und  $\sin$  können die Koordinaten der Punkte  $Q_1$  und  $Q_2$  (Koordinaten der «Ellbogen») berechnet werden. Dann ist  $P = k(Q_1, r_2) \cap k(Q_2, r_2)$ .

$$O\vec{Q}_1 = O\vec{M}_1 + r_1 \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1) \\ \sin(\alpha_1) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad O\vec{Q}_2 = O\vec{M}_2 + r_1 \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1) \\ \sin(\alpha_1) \end{pmatrix}$$

Daraus berechnet man  $\vec{v} = Q_1\vec{Q}_2$  und  $d = |\vec{v}|$ . Weil die Radien der beiden Kreise gleich  $r_2$ , vereinfacht sich das Kreisschnittproblem und es gilt  $p = \frac{1}{2}d$  und damit  $h = \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$ .

Der zu  $\vec{v}$  rechtwinklige Vektor  $\vec{u}$  muss um  $+90^\circ$  gedreht werden, also muss nach dem Vertauschen der Komponenten das Vorzeichen der ersten Komponente geändert werden.

$$O\vec{P} = O\vec{Q}_1 + \frac{1}{2}\vec{v} + h\vec{u}$$