



✂ **Aufgabe 458** Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit einen «Joland zu pullen», d.h. bei 50 Münzwürfen genau 4 mal «Zahl» zu werfen?

**Grundidee:** Wirft man eine Münze 50 mal, kann das Resultat mit Nullen und Einsen aufgeschrieben werden (0 ist «Kopf», 1 ist «Zahl»). Man erhält also ein «Wort» mit 50 Zeichen.

Jedes dieser Wörter erhält man mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Es gibt genau ein Wort mit 0 Einsen, 50 Wörter mit genau einer Eins und noch viel mehr Wörter mit mehr Einsen.

Die erste Frage, die wir beantworten wollen, ist die Frage, wie viele Wörter der Länge 50 es überhaupt gibt. Danach zählen wir, wie viele Wörter es gibt mit Länge 50 mit genau vier Einsen. Der Quotient der beiden Zahlen ergibt die Wahrscheinlichkeit.

**Gesamte Anzahl Wörter mit Länge 50** Für die gesamte Anzahl Wörter mit Länge 50 betrachten wir erst einmal Wörter der Länge 1, 2, usw.

Länge	Anzahl	Systematische Aufzählung aller Wörter
1		
2		
3		
4		
50		
$n$		

Um einzusehen, dass sich die Anzahl jedesmal verdoppelt, helfen folgende Überlegungen:



**Anzahl Wörter mit Länge 50 mit genau vier Einsen** Um die Anzahl zu zählen, fragen wir uns, auf wie viele Arten können solche Wörter gebildet werden. Wir stellen uns dazu 50 Stellen mit Nullen gefüllt vor. Dann platzieren wir vier Einsen.

Für die Platzierung der ersten Eins haben wir 50 Möglichkeiten. Für die zweite Eins haben wir noch 49 Möglichkeiten (auf den Platz der ersten Eins dürfen wir diese nicht setzen). Für die dritte Eins bleiben noch 48 und für die vierte Eins noch 47 Möglichkeiten. Total haben wir also

$$50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 = 5'527'200 \text{ Möglichkeiten.}$$

Aber *Achtung!* Wir haben jedes einzelne Wort mehrfach gezählt. Als Beispiel soll das Wort 10110010...0 dienen. Dieses Wort wurde z.B. mit der Platzierung 10230040...0 erreicht (wobei die Ziffern für die Nummer der Platzierung stehen). Aber natürlich auch mit der Platzierung 40320010...0. Wir müssen also folgende Frage beantworten:

Auf wie viele Arten können vier Einsen auf vier Positionen platziert werden?

Für die erste Eins haben wir 4 Möglichkeiten, für die zweite noch 3, für die dritte 2 und die letzte nur noch 1 Möglichkeit. Total also

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ Möglichkeiten.}$$

Wir haben oben also jedes Wort 24-fach gezählt. Damit ist die Anzahl Wörter mit Länge 50 und genau 4 Einsen

$$\frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 230'300.$$