7 Ungleichungen und Intervalle

Aufgabe 140 Lösen Sie folgende Ungleichungen

a) $2x - 4 > 2$ b) $3x + 8 < 2$ c) $5x + 2 \leq 3x$ d) $2x - 3 \geq x + 1$

7.1 Intervalle

Um ganze Bereiche von **reellen** Zahlen anzugeben, wird die Schreibweise mit **Intervallen** verwendet. Beispiele:

$[\sqrt{2}, \pi]$	Alle Zahlen von und mit $\sqrt{2}$ bis und mit π.
$]3, 8.5]$	Alle Zahlen grösser als 3 (ohne die 3) bis und mit 8.5.
$[-4, -\frac{1}{2}[$	Alle Zahlen von und mit -4 bis $-\frac{1}{2}$ (ohne $-\frac{1}{2}$).
$]0, 1[$	Alle Zahlen zwischen 0 und 1 ohne 0 und 1.
$]-\infty, 5.13]$	Alle Zahlen kleiner oder gleich 5.13.
$]-3.57, \infty[$	Alle Zahlen grösser als -3.57 (ohne -3.57).

Merke

Intervalle sind **Mengen von reellen Zahlen** und werden mit eckigen Klammern geschrieben, wobei zuerst die untere Grenze und dann die obere Grenze angegeben wird (durch ein Komma getrennt). Ist die Klammer «richtig herum», gehört die Grenze dazu, das Intervall ist **geschlossen**. Anderfalls ist das Intervall **offen**. Da $-\infty$ und ∞ keine Zahlen sind, gehören diese nie zum Intervall und die Klammern sind immer «offen».

Aufgabe 141 Geben Sie die Lösungsmengen der Aufgabe 140 als Intervall an.

a) $x > 3$, also $\mathbb{L} =$ b) $x < -2$, also $\mathbb{L} =$

c) $x \leq -1$, also $\mathbb{L} =$ d) $x \geq 4$, also $\mathbb{L} =$

Aufgabe 142 Was ist die kleinste Zahl im Intervall $[3, 4[$? Was ist die grösste Zahl im Intervall $[3, 4[$?

7.2 Ungleichungen

Aufgabe 143 Lösen Sie folgende Ungleichungen, geben Sie die Lösungsmenge als Intervall an und überprüfen Sie dann Ihr Resultat.

a) $-5x > 5$ b) $-\frac{x}{2} \leq -6$ c) $-x < 2$

7.2.1 Umformungen von Ungleichungen

Aufgabe 144 Erklären Sie schlüssig mit Hilfe einer Waage (eine Seite schwerer als die andere), warum bei Ungleichungen addieren und subtrahieren eines beliebigen Terms eine Äquivalenzumformung ist.

Aufgabe 145 Wie steht es mit der Multiplikation einer Ungleichung? Worauf ist zu achten? Erklären Sie ebenfalls mit Hilfe einer Waage (und finden Sie eine Interpretation für ein negatives Gewicht auf der Waage).

Aufgabe 146 Lösen Sie folgende Ungleichung auf zwei Arten: Einmal nur mit Addition/Subtraktion, einmal nur mit Multiplikation:

$$-x > 4$$

Merke

Bei Ungleichungen darf man uneingeschränkt addieren (und subtrahieren). Beim Multiplizieren (und Dividieren) mit einer ✎

7.3 Rechnen mit Bruchtermen

Merke

Vor der **Addition** (oder Subtraktion) von zwei Brüchen, müssen die Brüche erst **gleichnamig** gemacht werden, indem man sie **erweitert**. **Gleichnamige Brüche** werden addiert, indem man die **Zähler addiert**.

Merke

Es darf nur aus Produkten gekürzt werden. Die Faktoren selbst dürfen aber beliebig kompliziert sein.

Aufgabe 147 Falls möglich, faktorisieren Sie erst die Nenner! Machen Sie dann gleichnamig, fassen Sie zusammen, faktorisieren Sie und kürzen Sie, falls möglich.

a) $\dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y}$ b) $\dfrac{4}{z-1} + \dfrac{z-9}{z^2-1}$ c) $\dfrac{n}{n+1} - \dfrac{2n+1}{n-1} + \dfrac{n^2+5n}{n^2-1}$

d) $\dfrac{a}{a^2-b^2} + \dfrac{b}{(a-b)^2}$ e) $\dfrac{b-c}{a^2+ac} - \dfrac{a-b}{ac+c^2} + \dfrac{a^2+c^2}{a^2c+ac^2}$ f) $\dfrac{3s}{(s-2)^2} - \dfrac{2}{s} + \dfrac{s+4}{2s-s^2}$

Merke

Bruch mal Bruch, wie macht's der Kenner? Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner.
Es wird durch einen Bruch dividiert, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert.

Aufgabe 148 Vereinfachen Sie soweit wie möglich. *Hinweis: Es ist oft besser, erst die Summe oder Differenz als einen Bruch zu schreiben, bevor multipliziert wird (anstatt auszumultiplizieren).*

a) $\dfrac{u^2-v^2}{u^2+v^2}\left(\dfrac{u}{u+v} + \dfrac{v}{u-v}\right)$ b) $\left(\dfrac{1}{r-s} - \dfrac{1}{r+s}\right)^2$

c) $\left(\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d}\right) : \left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}\right)$ d) $\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) : \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

e) $\left(a^2 + 2 + \dfrac{1}{a^2}\right) : \left(a^2 - \dfrac{1}{a^2}\right)$ f) $\dfrac{1}{n^2+2n+1} \cdot \left(\dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right)$

g) $\left(\dfrac{3n^2(n+1) - 2n(n^2+4)}{n+1} + 12\right) : (n^2+4) - \dfrac{2}{n+1} + \dfrac{1-n^2}{n^2+n}$

7.4 Spezielle Ungleichungen

Beispiel: Lösen Sie folgende Ungleichung

$$\frac{x+3}{x-1} \leq 2 \qquad | \cdot (x-1) \qquad ⚠$$

Erstens handelt es sich hier um eine Gewinnumformung. Insbesondere muss $x \neq 1$ sein, weil sonst der Nenner zu Null wird.
Zweitens wissen wir nicht, ob $(x-1)$ positiv oder negativ ist und ob als Konsequenz das Zeichen umgedreht werden muss oder nicht.
Es müssen also zwei Fälle unterschieden werden:

Fall 1 $(x-1)>0$, d.h. $\boxed{x>1}$

Fall 2 $(x-1)<0$, d.h. $\boxed{x<1}$

Fasst man die beiden Fälle zusammen, erhält man folgende Lösungsmenge:
$\mathbb{L} =$

Aufgabe 149 Lösen Sie folgende Ungleichungen nach x auf:

a) $\dfrac{2x-3}{3x-2} \geq 2$ b) $\dfrac{x+2}{3+4x} < 5$ c) $\dfrac{x^2-3x-1}{x+1} \geq x-2$ d) $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x}{x-1} \geq 2$

7.4.1 Vorzeichen von Produkten und Quotienten

Merke

Hat eine Ungleichung die Form «Produkt $<, \leq, \geq, > 0$», reicht es, die Vorzeichen der Faktoren zu untersuchen. Genau dann, wenn eine ungerade Anzahl Faktoren negativ sind, ist auch das Produkt negativ.

Beispiel: $\frac{(x-4)(4-2x)}{x-1} < 0$
Wir untersuchen die einzelnen Faktoren $(x-4)$, $(4-2x)$ und $(x-1)$ auf die Vorzeichen und zeichnen die Grenzen auf dem Zahlenstrahl auf:

Wir lesen nun die Intervalle ab, wo das Vorzeichen des Produkts negativ ist:

Merke

Die Grenzen von Termen im Nenner sind **immer** auszuschliessen (Division durch Null). Sonst sind die Grenzen einzuschliessen, wenn das Vergleichszeichen ≤ 0 oder ≥ 0 ist.

Aufgabe 150 Geben Sie die Lösungsmengen für das Beispiel an, wenn das Zeichen zu a) $\leq$, b) $\geq$ und c) $>$ geändert wird.

Aufgabe 151 Lösen Sie folgende Ungleichungen. Wenn nötig, bringen Sie zuerst alles auf eine Seite, fassen Sie auf einen Bruchstrich zusammen und faktorisieren Sie.

a) $\dfrac{(x^4-4)}{(3-x)(x^2+1)} \geq 0$ b) $\dfrac{x^3-6x^2+9x}{x^2-1} \leq 0$

c) $\dfrac{x+8}{x+6} + \dfrac{x}{2} < 0$ d) $\dfrac{1}{x+2} > \dfrac{4x-3}{5x+3}$

Aufgabe 152 Lösen Sie die Ungleichungen von Aufgabe 149, indem Sie die Ungleichungen auf die Form «Bruch $<$ oder ≤ 0» bringen.

7.5 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:
Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".
Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.
Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 140 ex-ungleichungen-einfacher-einstieg

a)
$$\begin{aligned} 2x-4 &> 2 && \mid +4 \\ 2x &> 6 && \mid :2 \\ x &> 3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x+8 &< 2 && \mid -8 \\ 3x &< -6 && \mid :3 \\ x &< -2 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 5x+2 &\leq 3x && \mid -3x-2 \\ 2x &\leq -2 && \mid :2 \\ x &\leq -1 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x-3 &\geq x+1 && \mid -x+3 \\ x &\geq 4 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 143 ex-ungleichungen-aufgepasst

a)
$$\begin{aligned} -5x &> 5 && \mid :-5 \quad ⚠ \\ x &< -1 \\ \mathbb{L} &=]-\infty, -1[\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} -\frac{x}{2} &\leq -6 && \mid \cdot -2 \quad ⚠ \\ x &\geq 12 \\ \mathbb{L} &= [12, \infty[\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} -x &< 2 && \mid \cdot(-1) \quad ⚠ \\ x &> -2 \\ \mathbb{L} &=]-2, \infty[\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 147 ex-bruchterme-addition

a) $$\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} = \frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{4xy}{(x+y)(x-y)}$$

b) $$\frac{4}{z-1} + \frac{z-9}{z^2-1} = \frac{4}{z-1} + \frac{z-9}{(z+1)(z-1)} = \frac{4(z+1)+z-9}{(z+1)(z-1)} = \frac{4z+4+z-9}{(z+1)(z-1)} \frac{5z-5}{(z+1)(z-1)} = \frac{5(z-1)}{(z+1)(z-1)} = \frac{5}{(z+1)}$$

c) $$\frac{n}{n+1} - \frac{2n+1}{n-1} + \frac{n^2+5n}{n^2-1} = \frac{n}{n+1} - \frac{2n+1}{n-1} + \frac{n^2+5n}{(n+1)(n-1)} = \frac{n(n-1)-(2n+1)(n+1)+(n^2+5n)}{(n+1)(n-1)} = \frac{n^2-n-(2n^2+3n+1)+n^2+5n}{(n+1)(n-1)} = \frac{n^2-n-2n^2-3n-1+n^2+5n}{(n+1)(n-1)} = \frac{n-1}{(n+1)(n-1)} = \frac{1}{n+1}$$

d) $$\frac{a}{a^2-b^2} + \frac{b}{(a-b)^2} = \frac{a}{(a+b)(a-b)} + \frac{b}{(a-b)^2} = \frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)^2} + \frac{b(a+b)}{(a+b)(a-b)^2} = \frac{a(a-b)+b(a+b)}{(a+b)(a-b)^2} = \frac{a^2-ab+ab+b^2}{(a+b)(a-b)^2} = \frac{a^2+b^2}{(a+b)(a-b)^2}$$

e) $\dfrac{b-c}{a^2+ac} - \dfrac{a-b}{ac+c^2} + \dfrac{a^2+c^2}{a^2c+ac^2} = \dfrac{b-c}{a(a+c)} - \dfrac{a-b}{c(a+c)} + \dfrac{a^2+c^2}{ac(a+c)} = \dfrac{c(b-c)-a(a-b)+(a^2+c^2)}{ac(a+c)} = \dfrac{cb-c^2-(a^2-ab)+a^2+c^2}{ac(a+c)} = \dfrac{cb-a^2+ab+a^2}{ac(a+c)} = \dfrac{cb+ab}{ac(a+c)} = \dfrac{b(c+a)}{ac(a+c)} = \dfrac{b}{ac}$

f) $\dfrac{3s}{(s-2)^2} - \dfrac{2}{s} + \dfrac{s+4}{2s-s^2} = \dfrac{3s}{(s-2)^2} - \dfrac{2}{s} + \dfrac{s+4}{s(2-s)} = \dfrac{3s}{(s-2)^2} - \dfrac{2}{s} - \dfrac{s+4}{s(s-2)} = \dfrac{3s^2-2(s-2)^2-(s+4)(s-2)}{s(s-2)^2} = \dfrac{3s^2-2(4-4s+s^2)-(s^2+2s-8)}{s(s-2)^2} = \dfrac{3s^2-(8-8s+2s^2)-s^2-2s+8}{s(s-2)^2} = \dfrac{3s^2-8+8s-2s^2-s^2-2s+8}{s(s-2)^2} = \dfrac{6s}{s(s-2)^2} = \dfrac{6}{(s-2)^2}$
Hinweis: Anstatt Vorzeichenakrobatik $(2-s) = -(2-s)$, könnte man auch einfach $(2-s)^2 = (-(s-2))^2 = (s-2)^2$ verwenden.

Lösung zu Aufgabe 148 ex-bruchterme-querbeet

a) $\dfrac{u^2-v^2}{u^2+v^2}\left(\dfrac{u}{u+v}+\dfrac{v}{u-v}\right) = \dfrac{(u+v)(u-v)}{u^2+v^2}\left(\dfrac{u(u-v)}{(u+v)(u-v)}+\dfrac{v(u+v)}{(u+v)(u-v)}\right) = \dfrac{(u+v)(u-v)}{u^2+v^2}\left(\dfrac{u^2-uv+uv+v^2}{(u+v)(u-v)}\right) = \dfrac{(u+v)(u-v)}{u^2+v^2}\cdot\dfrac{u^2+v^2}{(u+v)(u-v)} = 1$

b) $\left(\dfrac{1}{r-s}-\dfrac{1}{r+s}\right)^2 = \left(\dfrac{r+s}{(r-s)(r+s)}-\dfrac{r-s}{(r+s)(r-s)}\right)^2 = \left(\dfrac{r+s-(r-s)}{(r-s)(r+s)}\right)^2 = \left(\dfrac{2s}{(r-s)(r+s)}\right)^2 = \dfrac{4s^2}{(r-s)^2(r+s)^2}$

c) $\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}\right) : \left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\right) = \dfrac{ad-bc}{bd} : \dfrac{ad+cb}{bd} = \dfrac{ad-bc}{bd}\cdot\dfrac{bd}{ad+cb} = \dfrac{ad-bc}{ad+cb}$

d) $\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) : \left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n^2-1}{n^2} : \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{(n+1)(n-1)}{n^2}\cdot\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n-1}{n}$

e) $\left(a^2+2+\dfrac{1}{a^2}\right) : \left(a^2-\dfrac{1}{a^2}\right) = \left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2 : \left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(a-\dfrac{1}{a}\right) = \left(a+\dfrac{1}{a}\right) : \left(a-\dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{a^2+1}{a} : \dfrac{a^2-1}{a} = \dfrac{a^2+1}{a}\cdot\dfrac{a}{a^2-1} = \dfrac{a^2+1}{(a+1)(a-1)}$

f) $\dfrac{1}{n^2+2n+1}\cdot\left(\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}\cdot\left(\dfrac{n^2+n+n^2+3n+2}{2}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}\cdot\left(\dfrac{2n^2+4n+2}{2}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}\cdot\left(\dfrac{2(n^2+2n+1)}{2}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}\cdot(n+1)^2 = 1$

g) $\left(\dfrac{3n^2(n+1)-2n(n^2+4)}{n+1}+12\right) : (n^2+4) - \dfrac{2}{n+1} + \dfrac{1-n^2}{n^2+n} = \left(3n^2-\dfrac{2n(n^2+4)}{n+1}+12\right) : (n^2+4) - \dfrac{2}{n+1} + \dfrac{(1+n)(1-n)}{n(n+1)} = \dfrac{3n^2}{n^2+4} - \dfrac{2n}{n+1} + \dfrac{12}{n^2+4} - \dfrac{2}{n+1} + \dfrac{1-n}{n} = \dfrac{3n^2+12}{n^2+4} - \dfrac{2n+2}{n+1} + \dfrac{1-n}{n} = \dfrac{3(n^2+4)}{n^2+4} - \dfrac{2(n+1)}{n+1} + \dfrac{1-n}{n} = 3-2+\dfrac{1-n}{n} = 1+\dfrac{1-n}{n} = \dfrac{n}{n}+\dfrac{1-n}{n} = \dfrac{n+1-n}{n} = \dfrac{1}{n}$

⚒ Lösung zu Aufgabe 149 ex-ungleichungen-mit-bruechen-und-diskussion

a) $\dfrac{2x-3}{3x-2} \geq 2 \qquad | \cdot (3x-2)$ ⚠

Fall 1 $(3x-2) > 0$, d.h. $\boxed{x > \frac{2}{3}}$

$$\begin{aligned} 2x-3 &\geq 2(3x-2) & \\ 2x-3 &\geq 6x-4 & &| -2x+4 \\ 1 &\geq 4x & &| : 4 \\ \frac{1}{4} &\geq x & &\text{und } x > \frac{2}{3} \\ \mathbb{L}_1 &= \varnothing & & \end{aligned}$$

Fall 2 $(3x-2) < 0$, d.h. $\boxed{x < \frac{2}{3}}$

$$\begin{aligned} 2x-3 &\leq 2(3x-2) & \\ 2x-3 &\leq 6x-4 & &| -2x+4 \\ 1 &\leq 4x & &| : 4 \\ \frac{1}{4} &\leq x & &\text{und } x < \frac{2}{3} \\ \mathbb{L}_2 &= \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right[& & \end{aligned}$$

Beide Fälle zusammengefasst: $\mathbb{L} = \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right[$

b) $\dfrac{x+2}{3+4x} < 5 \qquad | \cdot (3+4x)$ ⚠

Fall 1 $(3+4x) > 0$, d.h. $\boxed{x > -\frac{3}{4}}$

$$\begin{aligned} x+2 &< 5(3+4x) & \\ x+2 &< 15+20x & &| -x-15 \\ -13 &< 19x & &| : 19 \\ -\frac{13}{19} &< x & &\text{und } x > -\frac{3}{4} \\ \mathbb{L}_1 &= \left]-\frac{13}{19}, \infty\right[& & \end{aligned}$$

Fall 2 $(3+4x) < 0$, d.h. $\boxed{x < -\frac{3}{4}}$

$$\begin{aligned} x+2 &> 5(3+4x) & \\ x+2 &> 15+20x & &| -x-15 \\ -13 &> 19x & &| : 19 \\ -\frac{13}{19} &> x & &\text{und } x < -\frac{3}{4} \\ \mathbb{L}_2 &= \left]-\infty, -\frac{3}{4}\right[& & \end{aligned}$$

Beide Fälle zusammengefasst: $\mathbb{L} = \left]-\infty, -\frac{3}{4}\right[\,\cup\, \left]-\frac{13}{19}, \infty\right[$

c) $\dfrac{x^2-3x-1}{x+1} \geq x-2 \qquad | \cdot (x+1)$ ⚠

Fall 1 $x+1 > 0$, d.h. $\boxed{x > -1}$

$$\begin{aligned} x^2-3x-1 &\geq (x-2)(x+1) & \\ x^2-3x-1 &\geq x^2-x-2 & &| -x^2+3x+2 \\ 1 &\geq 2x & &| : 2 \\ \frac{1}{2} &\geq x & &\text{und } x > -1 \\ \mathbb{L}_1 &= \left]-1, \frac{1}{2}\right] & & \end{aligned}$$

Fall 2 $x+1 < 0$, d.h. $\boxed{x < -1}$

$$\begin{aligned} x^2-3x-1 &\leq (x-2)(x+1) & \\ x^2-3x-1 &\leq x^2-x-2 & &| -x^2+3x+2 \\ 1 &\leq 2x & &| : 2 \\ \frac{1}{2} &\leq x & &\text{und } x < -1 \\ \mathbb{L}_2 &= \varnothing & & \end{aligned}$$

Beide Fälle zusammengefasst: $\mathbb{L} = \left]-1, \frac{1}{2}\right]$

d)

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1} &\geq 2 \\
\frac{x(x-1)+x(x+1)}{x^2-1} &\geq 2 \\
\frac{x^2-x+x^2+x}{x^2-1} &\geq 2 \\
\frac{2x^2}{x^2-1} &\geq 2 && \mid :2 \\
\frac{x^2}{x^2-1} &\geq 1 && \mid \cdot (x^2-1) \quad ⚠
\end{aligned}
$$

Fall 1 $x^2-1>0$, d.h. $x^2>1$, d.h. $\boxed{x<-1 \text{ oder } x>1}$

$$
\begin{aligned}
x^2 &\geq x^2-1 && \mid -x^2 \\
0 &\geq -1 \\
\mathbb{L}_1 &=]-\infty,-1[\ \cup\ ]1,\infty[
\end{aligned}
$$

Fall 2 $x^2-1<0$, d.h. $\boxed{-1<x<1}$

$$
\begin{aligned}
x^2 &\leq x^2-1 && \mid -x^2 \\
0 &\leq -1 \\
\mathbb{L}_2 &= \varnothing
\end{aligned}
$$

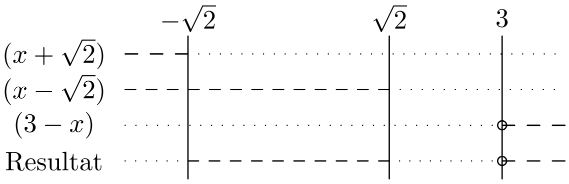
Beide Fälle zusammengefasst: $\mathbb{L}=]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$

🛠 Lösung zu Aufgabe 151 ex-ungleichungen-vorzeichen

a)

$$
\begin{aligned}
\frac{(x^4-4)}{(3-x)(x^2+1)} &\geq 0 \\
\frac{(x^2+2)(x^2-2)}{(3-x)(x^2+1)} &\geq 0 \\
\frac{(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{(3-x)(x^2+1)} &\geq 0
\end{aligned}
$$

(x^2+2) und (x^2+1) sind immer positiv (weil x^2 immer positiv oder Null ist) und können daher ignoriert werden.



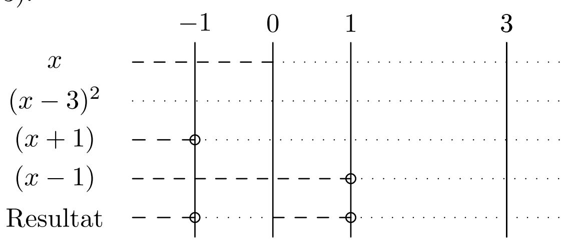
$\mathbb{L}=]-\infty,-\sqrt{2}]\ \cup\ [\sqrt{2},3[$

$x=3$ ist nicht Teil der Lösungsmenge, weil $(x-3)$ im Nenner vorkommt.

b)

$$
\begin{aligned}
\frac{x^3-6x^2+9x}{x^2-1} &\leq 0 \\
\frac{x(x-3)^2}{(x+1)(x-1)} &\leq 0
\end{aligned}
$$

$(x-3)^2$ ist zwar nie negativ wird aber 0 (für $x=3$).



$\mathbb{L}=]-\infty,-1[\ \cup\ [0,1[\ \cup\ \{3\}$

$x=3$ ist Teil der Lösungsmenge weil $(x-3)^3$ dort 0 ist. Anstatt $\{3\}$ könnte auch $[3,3]$ geschrieben werden.

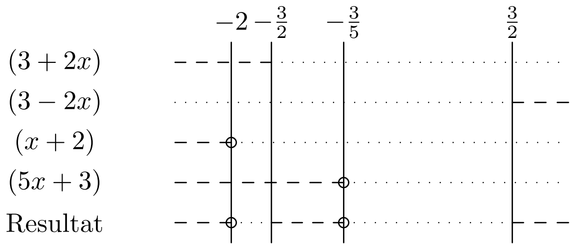
c)

$$
\begin{aligned}
\frac{x+8}{x+6}+\frac{x}{2} &< 0\\
\frac{2(x+8)}{2(x+6)}+\frac{x(x+6)}{2(x+6)} &< 0\\
\frac{2x+16}{2(x+6)}+\frac{x^2+6x}{2(x+6)} &< 0\\
\frac{2x+16+x^2+6x}{2(x+6)} &< 0\\
\frac{x^2+8x+16}{2(x+6)} &< 0\\
\frac{(x+4)^2}{2(x+6)} &< 0
\end{aligned}
$$

$(x+4)^2$ ist nie negativ, es reicht also $(x+6)$ zu betrachten.
$\mathbb{L} =]-\infty, -6[$

d)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x+2} &> \frac{4x-3}{5x+3} \qquad \Big| -\frac{4x-3}{5x+3}\\
\frac{1}{x+2}-\frac{4x-3}{5x+3} &> 0\\
\frac{5x+3}{(x+2)(5x+3)}-\frac{(x+2)(4x-3)}{(x+2)(5x+3)} &> 0\\
\frac{5x+3-(4x^2+5x-6)}{(x+2)(5x+3)} &> 0\\
\frac{5x+3-4x^2-5x+6}{(x+2)(5x+3)} &> 0\\
\frac{-4x^2+9}{(x+2)(5x+3)} &> 0\\
\frac{(3+2x)(3-2x)}{(x+2)(5x+3)} &> 0
\end{aligned}
$$

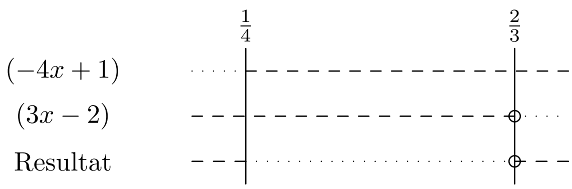


$\mathbb{L} = \left]-2, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{3}{5}, \frac{3}{2}\right[$

Lösung zu Aufgabe 152 ex-149-ohne-diskussion

a)

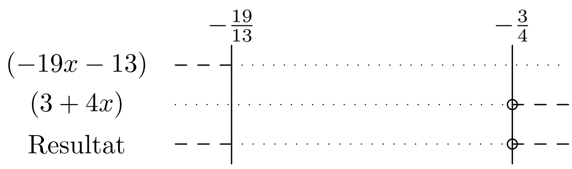
$$
\begin{aligned}
\frac{2x-3}{3x-2} &\geq 2 \qquad \big| -2\\
\frac{2x-3}{3x-2}-2 &\geq 0\\
\frac{2x-3}{3x-2}-\frac{2(3x-2)}{3x-2} &\geq 0\\
\frac{2x-3-(6x-4)}{3x-2} &\geq 0\\
\frac{-4x+1}{3x-2} &\geq 0
\end{aligned}
$$



Und damit ist $\mathbb{L} = \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right[$

b)

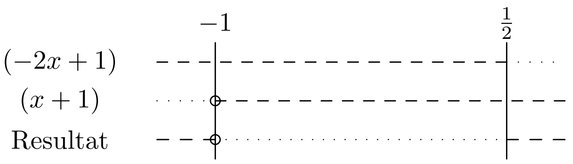
$$
\begin{aligned}
\frac{x+2}{3+4x} &< 5 \qquad \big| -5\\
\frac{x+2-5(3+4x)}{3+4x} &< 0\\
\frac{-19x-13}{3+4x} &< 0
\end{aligned}
$$



Und damit ist $\mathbb{L} = \left]-\frac{13}{19}, \infty\right[$

c)

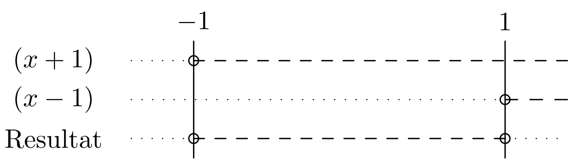
$$\begin{aligned}
\frac{x^2-3x-1}{x+1} &\geq x-2 \quad |-(x-2)\\
\frac{x^2-3x-1}{x+1}-\frac{(x+1)(x-2)}{x+1} &\geq 0\\
\frac{x^2-3x-1-(x^2-x-2)}{x+1} &\geq 0\\
\frac{-2x+1}{x+1} &\geq 0
\end{aligned}$$



Und damit ist $\mathbb{L} = \left]-1, \frac{1}{2}\right]$

d)

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1} &\geq 2 \quad |-2\\
\frac{x(x-1)+x(x+1)-2(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} &\geq 0\\
\frac{x^2-x+x^2+x-(2x^2-2)}{(x+1)(x-1)} &\geq 0\\
\frac{2}{(x+1)(x-1)} &\geq 0
\end{aligned}$$



Und damit ist $\mathbb{L} =]-\infty, -1[\, \cup\,]1, \infty[$.