22.2 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 431 ex-im-gradmass-ableiten

Der Betrag der Geschwindkeit (d.h. Länge des Geschwindigkeitsvektors) ist nicht mehr 1 sondern $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$. Für die Ableitungungen heisst das

$$\begin{aligned}\sin(\alpha)' &= \frac{\pi}{180} \cdot \cos(\alpha) \qquad \text{und}\\ \cos(\alpha)' &= -\frac{\pi}{180} \cdot \sin(\alpha).\end{aligned}$$

Darum ist das Bogenmass so viel eleganter.

Lösung zu Aufgabe 432 ex-tangens-ableiten

Für $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

Lösung zu Aufgabe 433 ex-beschleunigung-im-einheitskreis

$\vec{v}(t) = \left(\vec{OP}(t)\right)' = ((\cos(x))', (\sin(x))') = (-\sin(x), \cos(x))$.

$\vec{a}(t) = (\vec{v}(t))' = ((-\sin(x))', (\cos(x))') = (-\cos(x), -\sin(x)) = -\vec{OP}(t)$

Der Betrag (Länge) der Beschleunigung ist ebenfalls 1. Die Richtung ist entgegengesetzt der Richtung von $\vec{OP}$.

Lösung zu Aufgabe 434 ex-additionstheoreme-herleiten

Koordinaten von $P_\alpha = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.

$\vec{f_1} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix}$, $\vec{f_2} = \begin{pmatrix}-\sin(\alpha)\\ \cos(\alpha)\end{pmatrix}$.

Koordinaten im neuen Koordinatensystem: $P_{\alpha+\beta} = (\cos(\beta), \sin(\beta))$.

Also $\vec{OP}_{\alpha+\beta} = \cos(\beta)\vec{f_1} + \sin(\beta)\vec{f_2}$.

Komponenten im alten Koordinatensystem:

$\vec{OP}_{\alpha+\beta} = \cos(\beta) \cdot \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix} + \sin(\beta) \cdot \begin{pmatrix}-\sin(\alpha)\\ \cos(\alpha)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\beta)\cdot\cos(\alpha) - \sin(\beta)\cdot\sin(\alpha)\\ \cos(\beta)\cdot\sin(\alpha) + \sin(\beta)\cdot\cos(\alpha)\end{pmatrix}$

Es gilt natürlich auch: $\vec{OP}_{\alpha+\beta} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$

Daraus liest man ab:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 435 ex-additionstheoreme-minus

Ersetzt man α durch $-\alpha$ hat das eine Spiegelung an der x-Achse zur Folge. Damit ändert sich das Vorzeichen der y-Koordinate, also des Sinuswerts. Die x-Koordinate bleibt unverändert, also

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \qquad \text{und} \qquad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$