



Auf einen Beweis der Richtigkeit obiger Gleichung wird hier schweren Herzens verzichtet.

✂ **Aufgabe 443** Berechnen Sie folgende Skalarprodukte:

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

✂ **Aufgabe 444**

Mit den Definitionen des Skalarprodukts beweisen Sie folgende Eigenschaften:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

b) $\vec{u} \perp \vec{v} \implies \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

c) $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$

d) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

e) $\vec{0} \cdot \vec{v} = 0$

f) $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$

g) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$

Das Skalarprodukt hat vor allem drei Anwendungen: Die Berechnung von Winkeln zwischen Vektoren, die Überprüfung ob zwei Vektoren rechtwinklig aufeinanderstehen und die *Projektion* eines Vektors auf einen anderen.

✂ **Aufgabe 445** Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Mit Hilfe der Definitionen des Skalarprodukts bestimmen Sie eine Formel zur Berechnung des Cosinus des Zwischenwinkels von \vec{u} und \vec{v} .

Merke Winkel zwischen Vektoren

$$\cos(\angle(\vec{u}, \vec{v})) =$$

Die Arcuscosinus-Funktion liefert Winkel im Bereich $[0^\circ, 180^\circ]$, was genau dem Bereich von Winkeln zwischen zwei Vektoren entspricht.

✂ **Aufgabe 446** Berechnen Sie mit dem TR die Winkel im $\triangle ABC$ mit $A = (2, -4, 1)$, $B = (-2, -1, 4)$ und $C = (0, 7, -2)$.

22.4.1 Neue TR-Funktion für die Winkelberechnung

Die Berechnung von Winkeln zwischen Vektoren ist eine häufige Operation. Wir werden deshalb den TR um diese Funktion «aufrüsten»:

- Neues Dokument anlegen: «home/on 1» und einen Calculator hinzufügen.
- Dokument speichern unter: «doc 1 5», dort in den Ordner «MyLib» das Dokument unter dem Namen «vec» speichern. *MyLib befindet sich eventuell im übergeordneten Ordner.*
- Programmierer öffnen und neue Funktion anlegen: «menu 9 1 1», Name: «vangle», Typ: «Funktion», Bibliothekszugriff: «LibPub».

```
Define LibPub vangle(u,v)=
Func
    return cos-1(dotP(u,v)/norm(u)/norm(v))
EndFunc
```

- Das Programm wie folgt vervollständigen:
- Funktion speichern mit «menu 2 1».
- Dokument speichern mit «doc 1 4».
- In den Calculator gehen mit «home/on Calculator» und dort mit «menu 1 7 1» die Bibliotheken aktualisieren.
- Ausprobieren mit «Catalog 6», dort «vec» öffnen und die «vangle»-Funktion auswählen.